Часть I

A1 Упростите выражение $\dfrac{11^{1,5}}{11^{0,3}}$.

1) 1,2 2) 5 3) $11^{1,2}$ 4) 11^{5}

Решение: $\dfrac{11^{1,5}}{11^{0,3}} = 11^{1,5} - 11^{0,3} = 11^{1,2}$

Ответ 3)

A2 Вычислите: $\sqrt[3]{8 \cdot 0,125}$.

1) 1 2) 2 3) 2, 5 4) 0,001

Решение: $\sqrt[3]{8 \cdot 0,125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{0,125} = 2 \cdot 0,5 = 1.$

Ответ 1)

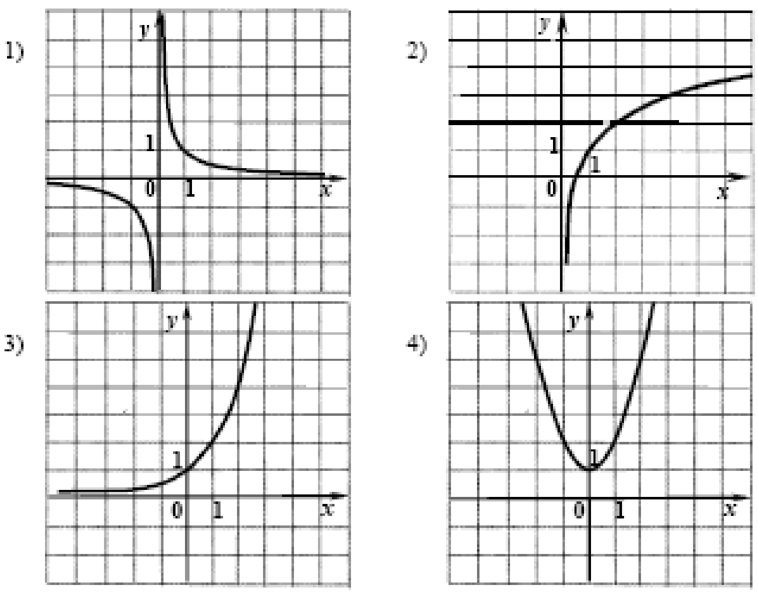
A3 Вычислите: $\log_3 162 - \log_3 6$

1) 156 2) 27 3) 3 4) 52

Решение: $\log_3 162 - \log_3 6 = \log_3 \dfrac{162}{6} = \log_3 27 = 3.$

Ответ 3)

A4 На одном из рисунков изображён график функции $y = 2^x$. Укажите номер этого рисунка.



Решение: 1) – гипербола , 2) логарифмическая функции, 3) показательная функция, 4) парабола

Ответ 3)

$\boxed{\text{А5}}$ Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$ 2) $y' = 3x^2 - \frac{e^x}{x+1}$ 3) $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$ 4) $y' = 36x^2 - e^x$

Решение: $y' = (12x^3 - e^x)' = (12x^3)' - (e^x)' = 12 \cdot 3x^2 - e^x = 36x^2 - e^x$.

Ответ 4)

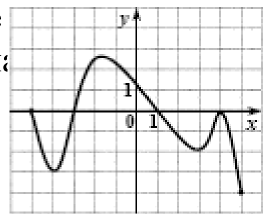
$\boxed{\text{А6}}$ Найдите множество значений функции $y = 4\cos x$.

1) $[-1; 1]$ 2) $[-4; 4]$ 3) $(-\infty; +\infty)$ 4) $[0; 4]$

Решение: $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 4\cos x \le 4 \Leftrightarrow y \in [-4; 4]$.

Ответ 2).

$\boxed{\text{А7}}$ Функция задана графиком. Укажите промежуток, на котором она принима только положительные значения.



1) (- 5; 0)   2) (-3; 1) 3) (-3; 4)   4) (-5; 4)

Решение: Функция принимает положительные значения, если точки её графика расположены выше оси ОХ. Такие значения данная функция принимает, если х изменяется от – 3 до 1. Левее – 3 и правее 1 по оси ОХ расположены ниже оси абсцисс, а значит значения функции отрицательны.

Ответ 2).

$\boxed{\text{А8}}$ Решите неравенство $\frac{5x}{4x-8} \ge 0$.

1) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$ 2) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$ 3) $[0; 2)$ 4) $[0; +\infty)$

Решение: Применяем метод интервалов

$$\frac{5x}{4x-8} \ge 0 <=> \frac{5x}{4(x-2)} \ge 0$$

\+ 0 – 2 +

Выбираем значение из промежутка от 0 до 2, например 1. Определим знак выражение с левой стороны неравенства при этом значении х.

Получаем $\frac{5\cdot 1}{4(1-2)}=\frac{5}{-4}=-1\frac{1}{4}$, знак выражения отрицательный, значит слева от 0 и справа от 2 значения выражения положительны. $x \neq 2$. Знаменатель дроби не может быть равным нулю.
Ответ $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$.
Записать ответ: 1)

A9 Решите уравнение 2sinx = 1

1) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$ 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$ 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$

Решение: 2sinx = 1 ⇔ sinx = 0,5 ⇔ x = $(-1)^n$arcsin0,5 + nπ, n∈Z ⇔ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n \in Z$.

Ответ 1)

A10 Решите неравенство $4^{x-2,7}>\frac{1}{64}$

1) $(-5; +\infty)$ 2) $(-\infty; 0,3)$ 3) $(-\infty; -5,7)$ 4) $(-0,3; +\infty)$

Решение: $4^{x-2,7}>\frac{1}{64} <=> 2^{2(x-2,7)}>2^{-6} <=> 2(x-2,7)>-6 <=> x-2,7>-3 <=> x>2,7-3 <=> x>-0,3$

Ответ 4).

B1 Решите уравнение $8\cdot 3^{\log_3 x}=13x-6$

Решение: $8\cdot 3^{\log_3 x}=13x-6 => 8x=13x-6 <=> 8x-13x=-6 <=> -5x=-6 <=> x=1,2$ ОДЗ x > 0

Записать ответ 1,2.

B2

Решите уравнение $\sqrt{x^2-24}=1$.
(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите меньший корень.)

$\sqrt{x^2-24}=1 => (\sqrt{x^2-24})^2=1^2=x^2-24=1 <=> x^2-25=0 <=> (x-5)(x+5)=0 <=> x_1=5;\ x_2=-5.$

Проверим подстановкой в первоначальное уравнение

$\sqrt{5^2-24}=\sqrt{25-24}=\sqrt{1}=1.$ 5 - корень.

$\sqrt{(-5)^2-24}=\sqrt{25-24}=\sqrt{1}=1.$ – 5- корень.

Меньший корень -5.
Зависать ответ : - 5.

B3 Найдите значение выражения $8\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha$, если $\sin\alpha=-0,2$.

Решение: $8\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 8(1 - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha = 8(1 - (-0{,}2)^2) - 2(-0{,}2)^2 = 8\cdot 0{,}96 - 2\cdot 0{,}04 = 7{,}6$

Записать ответ: 7,6

Часть II

B4 Решите уравнение $3^x - 6\cdot\left(\sqrt{3}\right)^x - 27 = 0$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

Решение:

$3^x - 6\cdot(\sqrt{3})^x - 27 = 0 <=> (\sqrt{3})^{2x} - 6\cdot(\sqrt{3})^x - 27 = 0 \mid (\sqrt{3})^x = t \mid;$

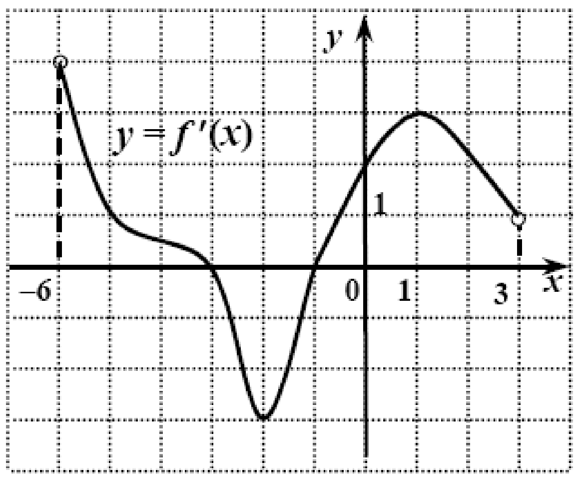
$t^2 - 6t - 27 = 0 <=> t_1 = -3,\ t_2 = 9.$

$(\sqrt{3})^x = -3 -$ решений нет.

$(\sqrt{3})^x = 9 <=> 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 <=> \frac{x}{2} = 2 <=> x = 4.$

Записать ответ: 4.

B5 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 3)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 3)$.



Решение: В точке максимума значение производной равно нулю и производная меняет знак с + на -.
Из двух точек на оси абсцисс этим условиям соответствует точка x = - 3.
Записать ответ: - 3.

B6 Вычислите значение выражения $8^{\log_8 6} + 625^{\log_{25}\sqrt{13}}$.

Решение: $8^{\log_8 6} + 625^{\log_{25}\sqrt{13}} = 6 + 25^{2\log_{25}\sqrt{13}} = 6 + 13 = 19$

Записать ответ: 19.

B7 Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2-3x-10}{1+\sqrt{4-x^2}} \le 0.$$

Решение : Знаменатель дроби число положительное при условии $4 - x^2 \ge 0$. Для того, чтобы выражение было отрицательно нужно выполниться условию $x^2 - 3x - 10 \le 0$. Значит решения неравенства можно найти решив систему:

$$\begin{cases} x^2-3x-10\le 0, \\ 4-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-5)\le 0, \\ (x-2)(x+2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2\le 0, \\ x-5\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2\ge 0, \\ x-5\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x+2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x+2\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \textit{нет}\ \text{решений} \\ -2\le x\le 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2\le x\le 2 \\ \textit{нет}\ \text{решений} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 5 \\ -2\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 2$$

Найдём целые решения неравенства -2, -1,0, 1 ,2. Пять решений.
Записать ответ: 5.

B8 Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 6. При $-2 \le x < 4$ она задается формулой $f(x) = |x-2| - 3$. Найдите значение выражения $4f(11) - 2f(-15)$.

Решение: Функция периодическая значит f(x + nT) = f(x – nT) = f(x), где T период функции.
4f(11) – 2f(-15) = 4f(11- 2·6) – 2f(-15 + 3·6) = 4f(-1) – 2f(3) = 4(|-1 – 2| - 3) – 2(|3 – 2| - 3) = 4(3 – 3) – 2(1 – 3) = 0 + 4 = 4.
Записать ответ: 4.

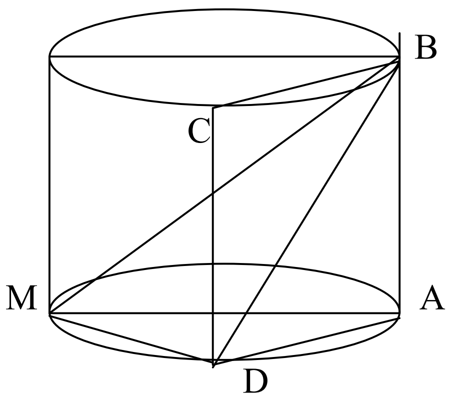
B9 Секретарю фирмы поручили разослать письма адресатам по списку. Секретарь, отдав своему помощнику часть списка, содержащую 80% адресатов, взял оставшуюся часть себе и разослал письма по своей части списка за время, в 6 раз меньшее, чем помощник – по своей. Сколько процентов списка адресатов секретарь должен был сразу отдать помощнику (взяв себе остальные), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

Решение: Пусть x – производительность секретаря, а y – производительность помощника.

z – число писем для раздачи по адресам. Число писем у секретаря - 0,2z, а у помощника - 0,8z.
0,2z/x – время работы секретаря. 0,8z/y – время работы помощника. Составим уравнение по условию, что время работы секретаря в 6 раз меньше времени работы помощника.
$6(0{,}2z/x) = 0{,}8z/y \Leftrightarrow 3/x = 2/y \Leftrightarrow 3y = 2x \Leftrightarrow x=1{,}5y$. Получили, что производительность секретаря в 1,5 раза больше чем производительность помощника. Значит, чтобы они работали одинаковое время, секретарю нужно взять в 1,5 раза писем больше, чем помощнику. Найдём процент писем, которые необходимо отдать помощнику.
$1/(1{,}5 + 1)*100\% = 40\%$.
Записать ответ: 40.

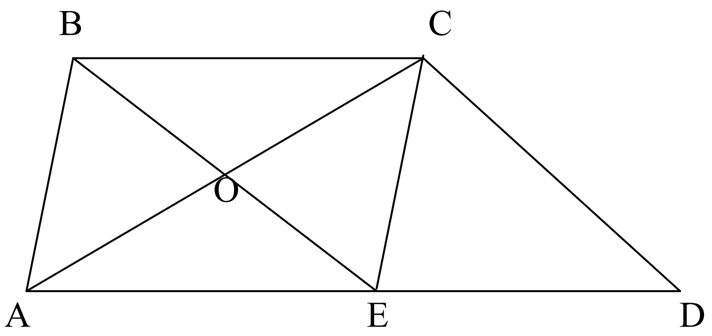
B10 Через образующую цилиндра AB проведены два сечения, пересекающие основание цилиндра: одно – по диаметру AM, другое – по хорде AD. Угол между плоскостями этих сечений равен $60°$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π. Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD.

Решение:



Площадь боковой поверхности цилиндра $S_б = 2\pi rl$, где r – радиус основания цилиндра, l – длина образующей цилиндра, $S_б$ – площадь боковой поверхности цилиндра.
Отсюда получаем, что $2\pi rl = 60\pi \Leftrightarrow r = 30/l \Rightarrow MA = 60/l$. $\angle MAD = 60^\circ$ Значит $\angle AMD=30^\circ \Rightarrow DA = 0{,}5AM \Rightarrow DA = 0{,}5(60/l) = 30/l$. $S_{ABCD} = DA\cdot AB = (30/l)\cdot l = 30$.
Записать ответ: 30.

B11 В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.



Решение: По условию AC – биссектриса угла A, значит $\angle$ BAC = $\angle$CAE. Аналогично из условия, что BE – биссектриса угла B получаем, что $\angle$ ABE =$\angle$CBE. Прямые BC и AD параллельны, а отрезки BE и AC секущие. Из этого получаем, что $\angle$ ABE =$\angle$CBE = =$\angle$ BEA. Значит в ΔABE AB = AE

$\angle$ BAC = $\angle$CAE = $\angle$ACB. Значит AB = BC. Получаем, что Δ AOE = Δ BOC по сторонам AE = BC и $\angle$OAE = $\angle$BCO, $\angle$CBO =$\angle$AEO.

Также ΔABO = ΔAOE по сторонам AB = AE и $\angle$BAO = $\angle$OAE, $\angle$ABO = $\angle$AEO. Из равенства треугольников получаем равенство углов $\angle$BOA = $\angle$BOC = $\angle$AOE = 90º и равенство сторон AO = OC, BO = OE. Получили, что фигура ABCD – ромб. По теореме Пифагора найдём длину стороны AE. $AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BE}{2}\right)^2} = \sqrt{80+20} = 10$.

Найдём площадь ромба двумя способами: произведение стороны и высоты, произведение диагоналей и приравняем.

$S = AE \cdot h,\ \mathrm{S} = \frac{\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE}}{2}$

$AE \cdot h = \frac{\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE}}{2} <=> 10h = \frac{8\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} <=> 10h = 80 <=> h = 8.$

Записать ответ: 8.

C1 Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x(2x-3)^6$ при $|x-1,5|\le 0,5$.

Решение:

1) $|x-1,5|\le 0,5 \Leftrightarrow -0,5\le x-1,5\le 0,5 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

2) $f'(x)=(2x-3)^6+12x(2x-3)^5=(2x-3)^5(14x-3)$.

$f'(x)=0$ при $x=1,5$, при $x=\dfrac{3}{14}$.

$\dfrac{3}{14}\notin[1;2]$.

$f(1)=1$, $f(1,5)=0$, $f(2)=2$.

Наибольшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[1;2]$ равно 2.

Ответ: 2.

C2 Найдите все значения *x*, при каждом из которых выражения $\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$ и $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\operatorname{tg} 2x}$ принимают равные значения.

Решение:

1) $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\operatorname{tg} 2x}=\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} \Leftrightarrow \dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x-\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}=0.$

2) $\dfrac{\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-2\sin 2x\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x(1-2\sin 2x)}{\operatorname{tg} 2x}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\cos 2x(1-2\sin 2x)=0\\ \cos 2x\ne 0\\ \sin 2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\sin 2x=0\\ \cos 2x\ne 0\\ \sin 2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

C3 Найдите все значения $x>1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a=\log_2 x+2\log_x 32-2$ и $b=41-\log_2^2 x^2$ больше 5.

Решение:

Так как $x>1$, то $\log_2 x>0$.

1) $a>5 \Leftrightarrow \log_2 x+2\log_x 32-2>5 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2^2 x-7\log_2 x+10}{\log_2 x}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x-2\right)\cdot\left(\log_2 x-5\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x>5\\ \log_2 x<2.\end{array}\right.$

2) $b>5 \Leftrightarrow 41-\log_2^2 x^2>5 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x<36 \Leftrightarrow \log_2^2 x<9 \Leftrightarrow \log_2 x<3$.

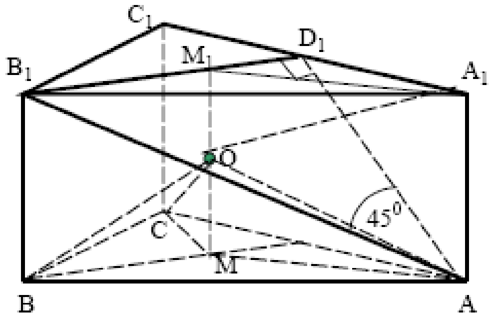
3) Наибольшее из чисел a и b больше 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них больше 5, т.е. когда

$\left[\begin{array}{l}a>5\\ b>5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x>5\\ \log_2 x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>32\\ x<8.\end{array}\right.$

Ответ: $1<x<8,\ x>32$.

C4 В шар радиусом $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45°. Найдите объём призмы.

Решение:



1) Пусть D_1 – середина ребра A_1C_1. Так призма правильная, то $B_1D_1 \perp A_1C_1$ и $CC_1 \perp B_1D_1$, и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1D_1 \perp ACC_1$. Значит, $\angle B_1AD_1 = 45°$ как угол между прямой B_1A и плоскостью ACC_1.

2) Пусть M и M_1 – центры оснований призмы, тогда $AM = BM = CM$ и $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1$. Так как призма правильная, то $OM \perp ABC$, где O – середина отрезка MM_1. Следовательно, по свойству наклонных и проекций $OA = OB = OC$ и $OA_1 = OB_1 = OC_1$. Так как $OM = OM_1$ и $AM = A_1M_1$, то прямоугольные треугольники OMA и OM_1A_1 равны по двум катетам. Значит, $OA = OA_1$. Следовательно, точка O равноудалена от всех вершин призмы $ABCA_1B_1C_1$ и поэтому является центром описанного около нее шара. Из условия радиус шара $R = OA = \sqrt{11}$.

3) Пусть $AB = a$. Тогда $B_1D_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но ΔB_1D_1A прямоугольный и $\angle B_1AD = 45°$. Следовательно, $AB_1 = \frac{B_1D_1}{\sin 45°} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Из ΔABB_1

$$BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

4) Отрезок $MA = \frac{2}{3}B_1D_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$, отрезок $OM = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Поэтому из прямоугольного ΔOMA имеем $\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{3} = 11$. Следовательно, $a = 2\sqrt{6}$. Объем призмы находим по формуле $V = S_{ABC} \cdot BB_1$. Но $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $BB_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $a = 2\sqrt{6}$. Отсюда $V = 36$.

Ответ: 36.

C5 Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $(1{,}5p-7)\cdot 32^{0{,}4x+0{,}2}+(29p-154)\cdot 0{,}125^{-\frac{x}{3}}+11p-41=0$ имеет ровно $10p-p^2-24$ различных корней.

__Решение:__

1) По свойствам степеней

$32^{0{,}4x+0{,}2}=(2^5)^{0{,}4x+0{,}2}=2^{2x+1}=2\cdot 4^x$, $\quad 0{,}125^{\frac{-x}{3}}=(2^{-3})^{\frac{-x}{3}}=2^x$. Поэтому данное уравнение имеет вид $(3p-14)4^x+(29p-154)2^x+11p-41=0$.

2) Пусть $t=2^x>0$. Тогда $(3p-14)t^2+(29p-154)t+11p-41=0$. (*)

Получили квадратное уравнение относительно t. Значит, число n различных корней исходного уравнения не больше 2.

Если $n=2$, то по условию $10p-p^2-24=2$, $p^2-10p+26=0$, что невозможно, т.к. $D=-4<0$.

3) Если $n=1$, то $10p-p^2-24=1$, $p^2-10p+25=0$, $p=5$. Тогда уравнение (*) примет вид $t^2-9t+14=0$, $t_1=2$, $t_2=7$. Так как $t=2^x$, то $x_1=1$, $x_2=\log_2 7$. Поэтому исходное уравнение имеет 2 корня, что противоречит $n=1$.

4) Если $n=0$, то $10p-p^2-24=0$, $p^2-10p+24=0$, $p_1=4$, $p_2=6$.

Пусть $p=4$. Тогда уравнение (*) примет вид $-2t^2-38t+3=0$. Ветви параболы направлены вниз, ось Oy она пересекает выше точки $(0;\ 0)$. Поэтому уравнение (*) имеет ровно один положительный корень t_0 и исходное уравнение имеет ровно один корень $x=\log_2 t_0$. Значит, $n=1$, что противоречит $n=0$.

5) Если $n=0$, а $p=6$, то уравнение (*) примет вид $4t^2+20t+25=0$, $t=-2{,}5$. Так как $t=2^x>0$, то исходное уравнение не имеет корней. Значит, $n=0$, т.е. $p=6$ удовлетворяет условию задачи.

__Ответ:__ 6.