Экзаменационный вариант ЕГЭ 2009 по математике

A1 Упростите выражение $\dfrac{10^{1,4}}{10^{0,7}}$.

1) 0,7   2) 2   3) $10^{0,7}$ 4) 10^{2}

Решение: $\dfrac{10^{1,4}}{10^{0,7}} = 10^{1,4-0,7} = 10^{0,7}$

Верный ответ 3).

A2 Вычислите: $\sqrt[3]{0,064\cdot 27}$.

1) 0,36   2) 3,4   3) 1,2   4) 0,012

Решение: $\sqrt[3]{0,064\cdot 27} = \sqrt[3]{0,064}\cdot\sqrt[3]{27} = 0,4\cdot 3 = 1,2.$

Верный ответ 3).

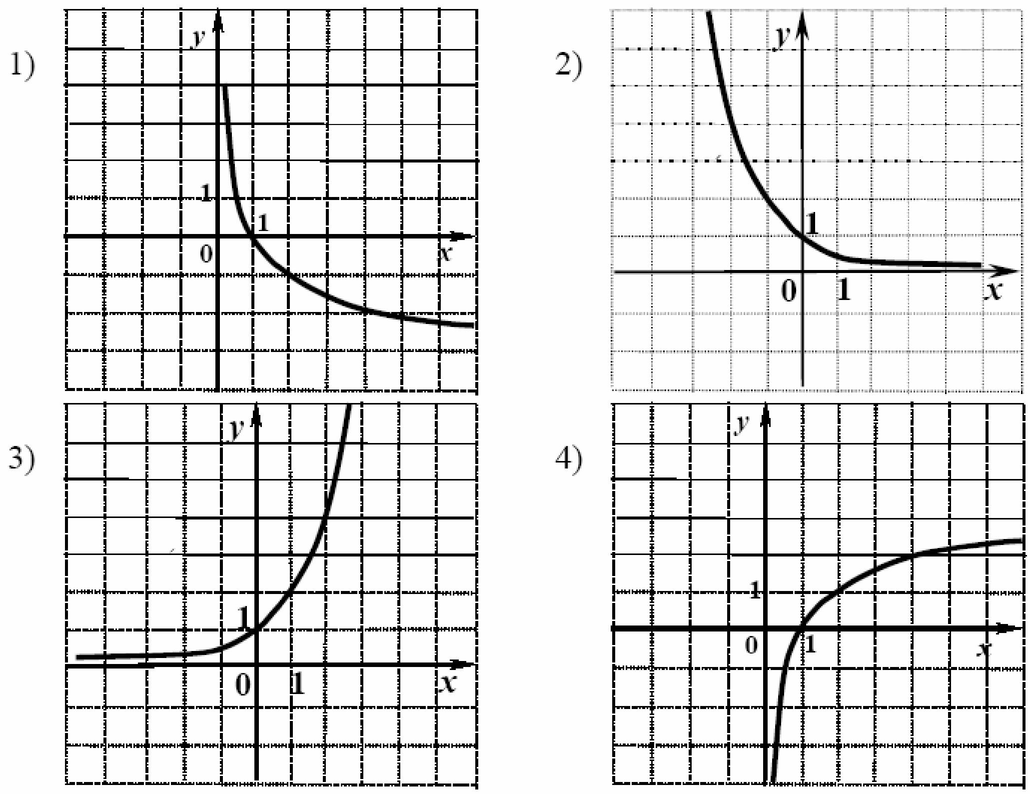
A3 Вычислите: $\log_2 400 - \log_2 25$.

1) 8   2) 2   3) 3   4) 4

Решение: $\log_2 400 - \log_2 25 = \log_2 \dfrac{400}{25} = \log_2 16 = 4.$

Верный ответ 4).

A4 На одном из рисунков изображен график функции $y = \log_2 x$. Укажите номер этого рисунка.



Решение: Функция $y = \log_2 x$ возрастающая и область определения функции значения $x > 0$.

Верный ответ 4).

A5 Найдите производную функции $h(x) = e^x - 4x^2$.

1) $h'(x) = e^x - \frac{4}{3}x^3$

2) $h'(x) = e^x - 8x$

3) $h'(x) = e^x - 2x$

4) $h'(x) = e^x - 4x$

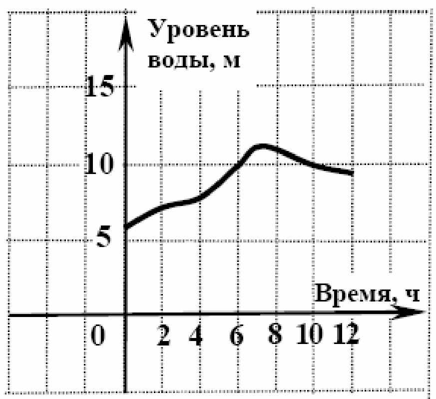
Решение $h'(x) = (e^x - 4x^2)' = (e^x)' - (4x^2)' = e^x - 8x.$
Верный ответ 2).

A6 Найдите множество значений функции $y = 3\cos x$.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $[-3; 3]$ 3) $[-1; 1]$ 4) $[0; 3]$

Решение: $|\cos x| \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$; $-3 \le 3\cos x \le 3$; $-3 \le y \le 3$; $y \in [-3; 3]$.
Верный ответ 2).

A7 На рисунке показано изменение уровня воды водохранилища в течение 12 часов во время паводка. Как только уровень воды превысил отметку 10 метров, через сливные отверстия в плотине начали сбрасывать воду до того момента, пока её уровень понизился до отметки 10 метров. Определите, сколько часов длился сброс воды.



1) 10 2) 2 3) 6 4) 4

Решение: Значения уровня 10 м было в 6ч и 10ч. Сброс воды осуществлялся между от 6ч до 10ч.
Сброс длился 10ч – 6ч = 4ч.
Верный ответ 4).

A8 Решите неравенство $\frac{6x+18}{7x} \le 0.$

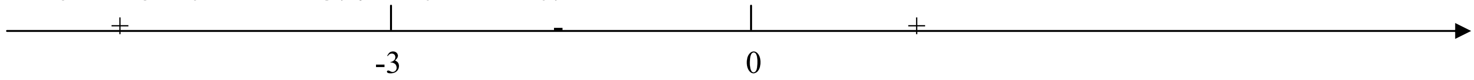
1) $[-3;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

2) $[-3;\ 0)$

3) $[-3;\ +\infty)$

4) $(-\infty;\ -3] \cup (0;\ +\infty)$

Решение: Решаем методом интервалов.
Отмечаем на оси точки со значениями при которых числитель и знаменатель обращается в ноль.
6x + 18 = 0 ⇔ x = - 3. 7x = 0 ⇔ x = 0.



Выбираем значение из промежутка (-3; 0), например число -1.
Найдём знак $\frac{6x+18}{7x}$ при x = -1. Получим $\frac{6\cdot(-1)+18}{7\cdot(-1)} = -\frac{12}{7} < 0$. В этом промежутке выражение отрицательно, а в соседних положительно. При значении x = - 3 значение выражения равно нулю. Неравенство нестрогое.
Верный ответ 2).

A9 Решите уравнение $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

1) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Решение: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} <=> x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi, n \in Z <=> x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z.$
Верный ответ 2).

A10 Решите неравенство $4^{6x+11} \ge 16.$

1) $(-\infty;\ -1{,}5]$ 2) $[-1{,}5;\ +\infty)$ 3) $\left[-\frac{5}{3};\ +\infty\right)$ 4) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right]$

Решение: $4^{6x+11} \ge 16 <=> 4^{6x+11} \ge 4^2 <=> 6x+11 \ge 2 <=> 6x \ge -9 <=> x \ge -\frac{9}{6} <=> x \ge -\frac{3}{2}.$

$x \in [-1{,}5; +\infty)$

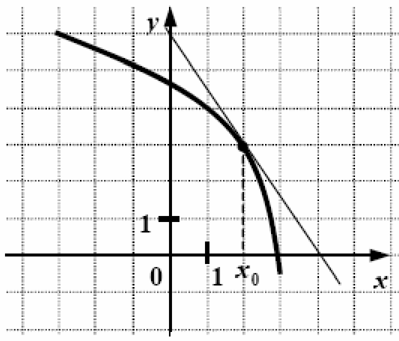
Верный ответ 2).

B1 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 <=> \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} <=> \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} <=> \cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

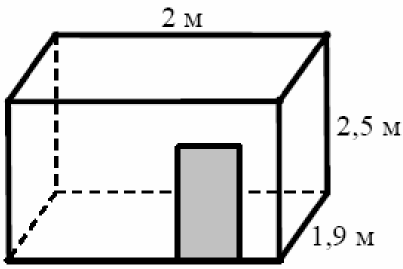
Ответ: cosα=0,6.

B2 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение: Значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной в этой точке с положительным направлением оси OX. Точка имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. Касательная образует тупой угол. Значение производной равно 3:(-2) = -1,5
Ответ -1,5.

B3 Для оклейки стен ванной комнаты (см. рисунок) нужно приобрести керамическую плитку, причем плитка покупается с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Ширина двери равна 0,75 м, высота – 2 м. Цена плитки 300 р. за 1 м^2. Определите стоимость плитки, если стены решено оклеить полностью, от пола до потолка.



Решение: Найдём площадь боковой поверхности. S = 2(1,9 + 2)·2,5 = 5·3,9 = 19,5. Дверь оклеивать не надо. Площадь двери 0,75·2 = 1,5. Оклеиваемая площадь будет 19,5 - 1,5 = 18. Найдём запас плитки. 18 + 18·0,1 = 18+ 1,8 = 19,8 (м^2). Найдём теперь стоимость плитки.
19,8·300 = 5940 р.
Ответ 5940.

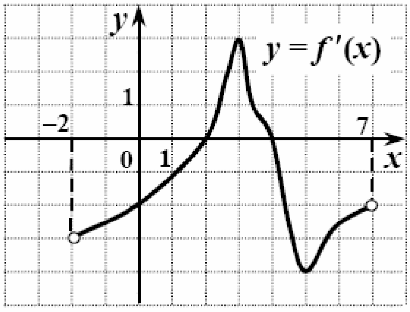
ЧАСТЬ 2

B4 Решите уравнение $5^x + 20\cdot\left(\sqrt{5}\right)^x - 125 = 0$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

Решение: Введём подстановку $(\sqrt{5})^x = y$. Получим уравнение $y^2 + 20y – 125 = 0$. Найдём корни. $y_1 = - 25$; $y_2 = 5$. Получим уравнения $(\sqrt{5})^x = -25$ и $(\sqrt{5})^x = 5$. Решаем $(\sqrt{5})^x = 5$ ⬄ x = 2. Корень один. Уравнение $(\sqrt{5})^x = -25$ решения не имеет.
Ответ 2.

B5 Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-2;\ 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку минимума функции $y=f(x)$ на промежутке $(-2;\ 7)$.



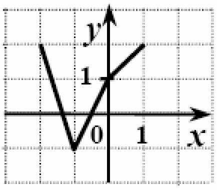
Решение: Точка минимума там, где значение производной равно нулю и вблизи этой точки производная меняет знак с минуса на плюс. Координата такой точки равна 2.
Ответ 2.

B6 Вычислите значение выражения $6^{\log_6 5}+100^{\lg\sqrt{8}}$.

Решение: $6^{\log_6 5}+100^{\lg\sqrt{8}}=5+10^{2\lg\sqrt{8}}=5+10^{\lg 8}=5+8=13$

Решаем, используя основное тождество $a^{\log_a b}=b$.
Ответ 13.

B7 Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-2\le x\le 1$. Найдите значение выражения $\dfrac{f(-1)\cdot f(9)}{f(-2)}$.



Решение: Для данной функции f(x) = f(x + 3·n) $n\in Z$.

$$\frac{f(-1)\cdot f(9)}{f(-2)}=\frac{f(-1)\cdot f(0+3\cdot 3)}{f(-2+3)}=\frac{f(-1)\cdot f(0)}{f(1)}$$

Находим по графику значения функций. f(-1) = -1; f(0) = 1; f(1) = 2.

Получим $\dfrac{f(-1)\cdot f(9)}{f(-2)}=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{f(1)}=\dfrac{-1\cdot 1}{2}=-0,5$.

Ответ – 0,5.

B8 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\big||x|+5-a\big|=2$ имеет ровно 3 корня.
(Если значений a более одного, то в бланке ответов запишите их сумму.)

Решение: По определению модуля из этого уравнения получаем два варианта.
1) |x| +5 – a = 2;
2) |x|+5 – a = - 2;
Решаем первое |x| +5 – a = 2; ⇔ |x| = a – 3; Уравнение имеет решение, если a – 3 ≥ 0; a ≥ 3.
Получим x = a – 3; x = 3 – a; - два корня при a ≥ 3.
Решаем второе |x|+5 – a = - 2; ⇔ |x| = a – 7; Уравнение имеет решение, если a – 7 ≥ 0; a ≥ 7.
Получим x = a – 7; x = 7 – a; - два корня при a ≥ 7.
Если 3 ≤ a < 7 уравнение 1) |x| +5 – a = 2; имеет два корня, а уравнение 2) |x|+5 – a = - 2; не имеет решения. (Всего два корня)

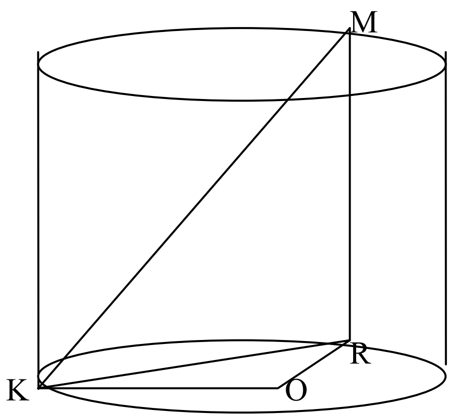
Если a ≥ 7. уравнение 1) |x| +5 – a = 2; имеет два корня, и уравнение 2) |x|+5 – a = - 2; имеет два корня. (Всего четыре корня)
Если a = 7, то уравнение 1) |x| +5 – a = 2; два корня, а уравнение 2) |x|+5 – a = - 2; - один: x = 0.
Ответ 7.

B9 Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 6 : 7 : 10. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10% и из второй – тоже на 10%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

Решение: 6x, 7x, 10x – объём добычи в каждой скважине. 6x + 7x + 10x = 23x – общий объём добычи.
6x – 0,6x = 5,4x, 7x – 0,7x = 0,63x - объём добычи из первой и второй скважины. 10x + p·10x – объём добычи из третьей скважины. Получим уравнение: 5,4x + 6,3x + 10x(p + 1) = 23x;
$p = \frac{23-11,7}{10} - 1 = 0,13$, 0,13·100% = 13%.
Ответ 13.

B10 Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания цилиндра равен $30°$, $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

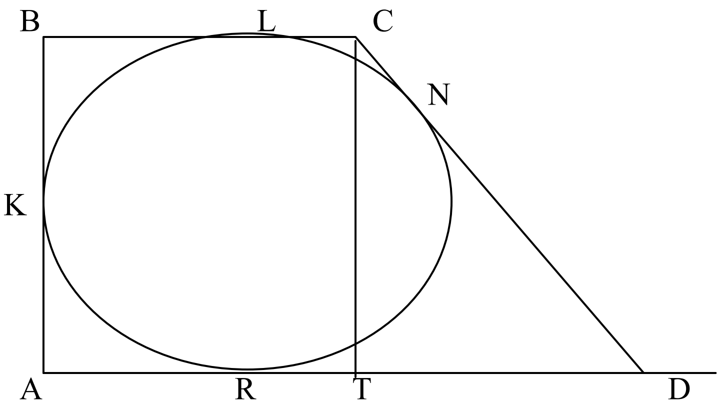
Решение:



Треугольник KMR – прямоугольный с углом MKR = 30°. MK = 8, значит MR = 4, как катет лежащий против угла в 30°. Периметр осевого сечения равен удвоенной сумме диаметра и высоты цилиндра. Высота равна MR = 4. Найдём радиус основания цилиндра. Боковая поверхность цилиндра вычисляется по формуле. $S_б = 2\pi R \cdot H$. Получим $2\pi R \cdot H = 40\pi \Leftrightarrow R = 40\pi/8\pi$. R = 5.
$P_{осев.} = 2(2R + H) = 2(10 + 4) = 28$.
Оттает 28.

B11 Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9, а радиус вписанной в нее окружности равен 4. Найдите большее основание трапеции.

Решение:



BL = BK, LC = CN, ND = DR, KA = AR = 4 – равны как касательные к окружности, BA = 2·4 = 8. Средняя линия равна полусумме длин оснований трапеции. (BC + AD)/2=9 = (BA + CD)/2. (8 + CD)/2 = 9 => CD = 10. CT $\perp$ AD, AB = CT, TD = AD – BC. По теореме Пифагора $(CT)^2 + (AD - BC)^2 = CD^2$; $8^2 + (AD - BC)^2 = 10^2$; AD – BC = 6 и AD + BC = 18. => 2·AD = 24; AD = 12.
Ответ 12.

C1 Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 16}$ при $|x - 5{,}5| \le 2{,}5$.

Решение:

1) $|x - 5{,}5| \le 2{,}5 \Leftrightarrow -2{,}5 \le x - 5{,}5 \le 2{,}5 \Leftrightarrow 3 \le x \le 8$.

2) $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 + 16\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + 16\right)^2} = 2 \cdot \dfrac{16 - x^2}{\left(x^2 + 16\right)^2}$.

$f'(x) = 0$ при $x = 4$, при $x = -4$.

$-4 \notin [\,3;8]$.

$f(3) = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$, $f(4) = \dfrac{8}{32} = 0{,}25$, $f(8) = \dfrac{16}{80} = 0{,}2$.

Наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[3;8]$ равно $0{,}2$.

Ответ: 0,2.

C2 Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$ и $\dfrac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2}-\sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$ принимают равные значения.

Решение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2}-\sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}\Leftrightarrow\dfrac{\sin 2x-\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}=0.$

2) $\dfrac{2\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos x}{\operatorname{tg} x}=0\Leftrightarrow\dfrac{\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)\cos x}{\operatorname{tg} x}=0\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)\cos x=0\\ \cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x+\sqrt{2}=0\\ \cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

C3 Найдите все значения $x>1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a=\log_2 x+2\log_x 32-2$ и $b=41-\log_2^2 x^2$ больше 5.

Решение:

Так как $x>1$, то $\log_2 x>0$.

1) $a>5\Leftrightarrow\log_2 x+2\log_x 32-2>5\Leftrightarrow\dfrac{\log_2^2 x-7\log_2 x+10}{\log_2 x}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\log_2 x-2\right)\cdot\left(\log_2 x-5\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x>5\\ \log_2 x<2.\end{array}\right.$

2) $b>5\Leftrightarrow 41-\log_2^2 x^2>5\Leftrightarrow 4\log_2^2 x<36\Leftrightarrow\log_2^2 x<9\Leftrightarrow\log_2 x<3$.

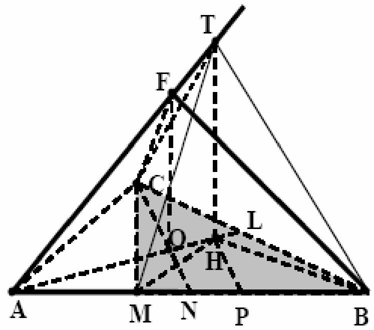
3) Наибольшее из чисел a и b больше 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них больше 5, т.е. когда

$\left[\begin{array}{l}a>5\\ b>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x>5\\ \log_2 x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>32\\ x<8.\end{array}\right.$

Ответ: $1<x<8,\ x>32$.

C4 Около правильной пирамиды *FABC* описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания *ABC* пирамиды. Точка *M* лежит на ребре *AB* так, что $AM : MB = 1:3$. Точка *T* лежит на прямой *AF* и равноудалена от точек *M* и *B*. Объем пирамиды *TBCM* равен $\frac{5}{64}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды *FABC*.

Решение:



1) Пусть O – центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды FABC. Так как $OA = OB = OC = OF = R$, а $O \in ABC$, то точка O является также центром окружности радиуса R, описанной около треугольника ABC. Треугольник ABC – правильный, следовательно, O – точка пересечения медиан треугольника ABC, $AB = R\sqrt{3}$.
2) FABC – правильная пирамида, поэтому FO – высота пирамиды и $AFO \perp ABC$. По условию $T \in AF$ и $TM = TB$. Опустим из точки T перпендикуляр TH на прямую AO. Так как $AFO \perp ABC$, то $TH \perp ABC$, и следовательно, TH – высота пирамиды TBCM, а отрезки HM и HB – проекции равных наклонных TM и TB. Значит, $HM = HB$, и поэтому треугольник BHM – равнобедренный, а его высота HP является медианой, то есть $PM = PB$.
3) Объем V пирамиды TBCM, равный $\frac{1}{3}TH \cdot S_{BCM}$, выразим через R. Из условия $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ имеем $AM = \frac{1}{4}AB = \frac{R\sqrt{3}}{4}$, $MB = \frac{3R\sqrt{3}}{4}$, $MP = \frac{3R\sqrt{3}}{8}$. Отсюда $AP = \frac{5R\sqrt{3}}{8}$. В прямоугольном треугольнике APH угол A равен 30°, следовательно, $AH = \frac{AP}{\cos 30^\circ} = \frac{5R}{4}$. Так как $OA = OF$, то прямоугольный треугольник AOF – равнобедренный, поэтому в прямоугольном треугольнике ATH угол A равен 45°, следовательно, $AH = TH$. Медиана CN правильного треугольника ABC является его высотой. Поэтому CN – высота треугольника BCM. Следовательно, площадь треугольника BCM можно найти по формуле $S_{BCM} = 0{,}5CN \cdot BM$. Имеем $CN = \frac{3}{2}CO = \frac{3R}{2}$ и $S_{BCM} = \frac{9R^2\sqrt{3}}{16}$. Отсюда

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5R}{4} \cdot \frac{9R^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15R^3\sqrt{3}}{64}$. По условию $\frac{15R^3\sqrt{3}}{64} = \frac{5}{64}$,

откуда $R^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C5 Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $(1{,}5p-7)\cdot 32^{0{,}4x+0{,}2}+(29p-154)\cdot 0{,}125^{-\frac{x}{3}}+11p-41=0$ имеет ровно $10p-p^2-24$ различных корней.

Решение:

1) Так как $32^{0{,}4x+0{,}2}=(2^5)^{0{,}4x+0{,}2}=2^{2x+1}=2\cdot 4^x$, $0{,}125^{\frac{-x}{3}}=(2^{-3})^{\frac{-x}{3}}=2^x$, то $(3p-14)4^x+(29p-154)2^x+11p-41=0$.

Пусть $t=2^x>0$. Тогда получаем квадратное уравнение относительно t с параметром p:

$(3p-14)t^2+(29p-154)t+11p-41=0$. (*)

Значит, число n различных корней исходного уравнения не больше 2.

2) Если $n=2$, то по условию $10p-p^2-24=2$, $p^2-10p+26=0$, что невозможно, т.к. $D=-4<0$. Остаются случаи $n=1$ и $n=0$.

Если $n=1$, то $10p-p^2-24=1$, $p^2-10p+25=0$, $p=5$. Тогда уравнение (*) примет вид $t^2-9t+14=0$, $t_1=2$, $t_2=7$. Так как $t=2^x$, то $x_1=1$, $x_2=\log_2 7$. Поэтому $n=2$. Противоречие с равенством $n=1$.

3) Если $n=0$, то $10p-p^2-24=0$, $p^2-10p+24=0$, $p_1=4$, $p_2=6$.

Пусть $p=4$. Тогда уравнение (*) примет вид $-2t^2-38t+3=0$. Ветви параболы направлены вниз, ось Oy она пересекает выше точки $(0;\ 0)$. Поэтому уравнение (*) имеет ровно один положительный корень t_0 и исходное уравнение имеет ровно один корень $x=\log_2 t_0$. Значит, $n=1$. Противоречие с равенством $n=0$.

Пусть $p=6$. Тогда уравнение (*) примет вид $4t^2+20t+25=0$, $t=-2{,}5$. Так как $t=2^x>0$, то исходное уравнение не имеет корней. Значит, $p=6$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6.