Вариант №3

Часть 1

А1. Найдите значение выражения: $a^{\frac{11}{5}} : a^{\frac{1}{5}}$ при $a = \frac{1}{2}$.

1) 2 2) 1,25 3) 4 4) 0,25

А2. Вычислите значение выражения: $9^{\log_3 5} - \log_2 2m$, если $\log_2 m = 19$.

1) 3 2) 5 3) 8 4) 9

А3. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{500}}$.

1) $0{,}8\cdot\sqrt[6]{2}$ 2) $0{,}8\cdot\sqrt[12]{2}$ 3) $0{,}4\cdot\sqrt[8]{2}$ 4) $0{,}6\cdot\sqrt[16]{2}$

А4. На одном из следующих рисунков (см. рис. 26) изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.

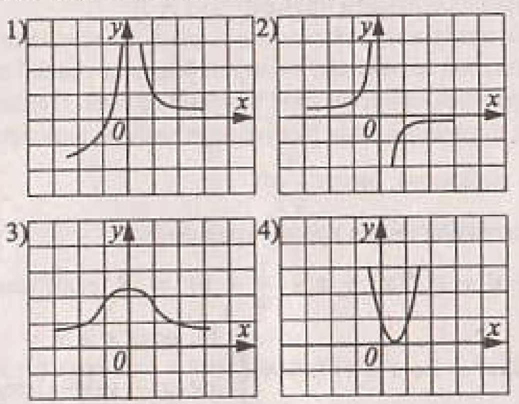

Рис. 26.

А5. Найдите производную функции $y = x^2\cdot 2^x$.

1) $x\cdot 2^x\cdot\ln 2$
2) $2x\cdot 2^x - \ln 2\cdot x^2\cdot 2^x$
3) $x\cdot(4+x^2)\cdot 2^{x-1}$
4) $2^x\cdot(2x + x^2\cdot\ln 2)$

А6. Укажите множество значений функции $y = 3 - 2\cos x$.

1) $[1;5]$ 2) $[-3;9]$ 3) $[1;3]$ 4) $[3;5]$

А7. Решите уравнение: $\sin\frac{x}{4} = -1$.

1) $8\pi n,\ n\in Z$ 2) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$
3) $-\pi+4\pi n,\ n\in Z$ 4) $-2\pi+8\pi n,\ n\in Z$

А8. Решите неравенство: $\log_4(x-1)\leqslant 0{,}5$.

1) $(1;+\infty)$ 2) $(1;3]$
3) $[3;+\infty)$ 4) $\left(1;\frac{17}{16}\right)$

А9. На рис. 27 изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-4;5]$. Укажите множество всех значений x, для которых $f(x)+g(x)\geqslant 2$.

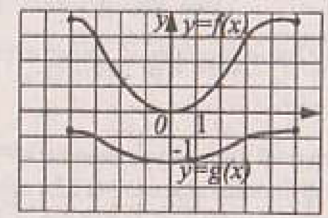

Рис. 27.

1) $[-3;3]$ 2) $[-4;-3]\cup[3;5]\cup\{0\}$
3) $[-4;5]$ 4) $[-4;-3]\cup[3;5]$

А10. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt[6]{\frac{2x-1}{x+2}-1}.$$

1) $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$ 2) $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$
3) $(-3-2)\cup(-2;+\infty)$ 4) $(-\infty;-3]\cup(-2;+\infty)$

В1. Найдите значение выражения $2\cos 2\alpha - 3\sin^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}4$.

В2. Решите уравнение: $x^2\sqrt{x+2} - 9\sqrt{x+2} = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите произведение всех его корней.

В3. Решите уравнение: $4^{\log_2 x} = 4 - 3x$ (если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите сумму всех его корней).

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $\log_4 x^2 \cdot \log_9 x \cdot \log_x 2 \cdot \log_{x^2} 81$ при $x = 1{,}9$.

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На рис. 28 изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом 27° к положительному направлению оси абсцисс.

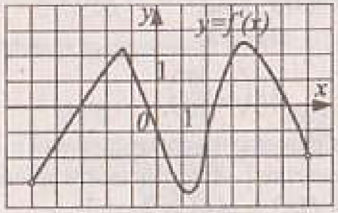

Рис. 28.

B6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\frac{5 \cdot 2^x - 2 - 2^{2x+1}}{x^2 + 4} \geqslant 0?$$

B7. Найдите наибольший корень уравнения: $4^{|x-1|} = 32$.

B8. Периодическая функция определена для всех действительных чисел. Ее период равен 3 и $f(0) = 1$; $f(1) = 2$. Найдите значение выражения $2f(6) - 3f(7) + f(-3)$.

B9. Предприятие увеличило за первый год выпуск продукции на 5%. В следующем году выпуск продукции увеличился на 20%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

B10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AC = 12$, $CB = 16$, а ее боковое ребро равно $10\sqrt{11}$. В призме проведены два сечения. Одно из них проходит через ребро AC и точку K на ребре BB_1, такую, что $BK : KB_1 = 2 : 3$, другое — через ребро CC_1 и середину ребра AB. Найдите длину отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

B11. В треугольнике MTK медиана ML пересекает медиану TN в точке P. Найдите площадь треугольника MTK, если площадь четырехугольника $NPLK$ равна 7.

C1. Найдите значение функции $y = 4^{\log_2 \frac{\sqrt{x-x^3}}{x} - \log_{0,5} x}$ в точке

максимума.

C2. Решите уравнение: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Часть 3

C3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $25^{a+x} + 25^{a-x} + 2\cdot(a+1)\cdot 5^{2a+x} + 2\cdot(a+1)\cdot 5^{2a-x} \leqslant (3-a^2)\cdot 5^{2a}$ не имеет решений.

C4. Дана правильная треугольная пирамида. Центр основания пирамиды является вершиной второй правильной четырехугольной пирамиды, основание которой вписано в боковую грань первой пирамиды. При этом, одна из сторон основания второй пирамиды лежит на стороне основания первой. Найдите угол, под которым боковая грань пирамиды наклонена к плоскости ее основания.

C5. Решите уравнение $f(g(x)) + 4g(f(x) - 1) = 2$,

если $f(x) = 2 - 2x - x^2$ и $g(x) = \begin{cases} 2, & x < 3, \\ 3^{x-2} - \dfrac{1}{x-2}, & x \geqslant 3. \end{cases}$

Вариант №18

Часть 1

А1. Вычислите: $\left(3^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot 3^{-1\frac{1}{2}}$.

1) $\sqrt{3}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 3) 3 4) 1

А2. Упростите выражение: $\log_2 5 \cdot \log_5 4 - \log_{16} 8$.

1) 0 2) 1,5 3) 0,75 4) 1,25

А3. Найдите значение выражения: $\dfrac{\left(p^2\sqrt{q}\right)^{1,5}}{\sqrt[4]{q^5}}$ при $p = 2$, $q = 2$.

1) $4\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) 2

А4. Определите область определения функции, график которой изображен на рис. 71.

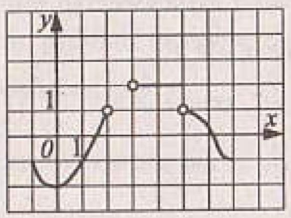

Рис. 71.

1) $[-1; 2) \cup (3; 7]$ 2) $[-1; 2) \cup (3; 5) \cup (5; 7]$
3) $[-2; 1) \cup \{3\}$ 4) $[-1; 7]$

А5. Найдите производную функции: $y = \ln(5x - 1) + \ln 5x$.

1) $y' = \dfrac{1}{5x-1} + \dfrac{1}{5x}$ 2) $y' = \dfrac{5}{5x-1} + \dfrac{1}{x}$
3) $y' = \dfrac{5}{5x-1} - \dfrac{5}{x}$ 4) $y' = \dfrac{1}{5x-1} - \dfrac{1}{x}$

А6. Найдите множество значений функции: $y = -\log_3(1 + \sqrt{x})$.

1) $(-\infty; 0]$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $(-\infty; 1]$

А7. Решите уравнение $3 \sin \dfrac{x}{3} = 1$.

1) $\dfrac{\arccos 0{,}8}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ 2) $\pm\dfrac{\arccos 0{,}8}{4} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in Z$
3) $\pm\dfrac{\arccos 0{,}8}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ 4) $\pm \arccos 0{,}2 + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$

А8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(5x - 16) \geqslant -2$.

1) $(-\infty; 5)$ 2) $(0{,}2; 5]$ 3) $(-\infty; 5]$ 4) $[5; +\infty)$

А9. Решите неравенство: $x \cdot f(x) > 0$. График $y = f(x)$ изображен на рис. 72.

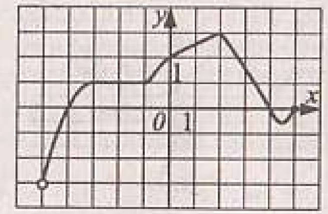

Рис. 72.

1) $(-5; -4) \cup (0; 4)$ 2) $(-4; -1) \cup (0; 4) \cup \{5\}$
3) $(-4; 4)$ 4) $[-4; -1] \cup [0; 4]$

А10. Найдите множество значений x, при которых определено значение функции $y = \sqrt{\cos 2x}$.

1) $x - 2\pi k \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$
2) $x - 2\pi k \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $k \in Z$
3) $x - 2\pi k \in (0; \pi)$, $k \in Z$
4) $x - 2\pi k \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $k \in Z$

В1. Найдите значение выражения: $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^4 \alpha} + 1$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

В2. Сколько корней имеет уравнение $\cos 2x + \sin^2 x + \cos x = 0$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$?

В3. Найдите сумму всех корней уравнения: $\dfrac{\sqrt{\log_x 3 + 1}}{\sqrt{\log_x 3 - 3}} = -1$.

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $\dfrac{\frac{2}{3}-\log_8(3x+1)}{\log_{fd18}(11x-1)+\frac{1}{3}}$ при $x=9$.

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-5;4)$. На рис. 73 изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y=f(x)$, тангенс угла наклона которых к оси абсцисс равен 3.

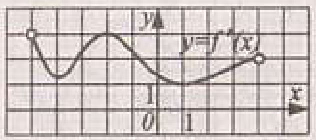

Рис. 73.

B6. Найдите количество решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(5x-2)>-1$, удовлетворяющих условию $2\cos 5\pi x=\sqrt{3}$.

B7. Сколько решений имеет уравнение $\cos^2\sqrt{x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ на отрезке $[0;\pi^2]$?

B8. Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 3 и $f(-3)=4$. Найдите значение выражения $f^2(6)-f(0)-2f(3)$.

B9. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два пешехода. Первый сделал привал на 10 мин., но пришел в пункт B на 20 мин. раньше второго. Сколько часов на весь путь потратил второй пешеход, если он шел в полтора раза медленнее первого?

B10. В пирамиде $SABCD$ с квадратным основанием $ABCD$ точка H — середина стороны AB. Углы ASH и BSH равны, прямые SH и BC перпендикулярны. Косинус угла между плоскостью основания и прямой SD равен 0,8. Длина SC равна 25. Найдите площадь основания пирамиды.

B11. Точка O — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO=\sqrt{2}$, $AB=5$.

C1. Найдите область определения функции: $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}}$.

C2. Решите уравнение: $\log_5(25-x)=2^{x+1}$.

Часть 3

C3. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $\dfrac{(a\sin x-\cos x)(a\sin x+\cos x)}{\sin 2x}\leqslant 0$ при любом значении параметра a, принадлежащем отрезку $[1;\sqrt{3}]$.

C4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $AD=12$ и $AB=3$. Высота параллелепипеда AA_1 равна 7. На ребрах AD, DC и DD_1 выбраны точки P, R и Q соответственно так, что P — середина AD, угол между прямой PQ и плоскостью $ABCD$ равен 45°. Длина отрезка CR равна 2. Найдите объем тетраэдра B_1PQR.

C5. Найдите количество различных решений уравнения

$g(f(x))-\dfrac{f(g(x))}{3}=-10$, если известно, что $f(x)=2x^4+8x+9$

и $g(x)=\begin{cases}-9{,}3, \text{ если } x>3,\\ 2^x-\dfrac{1}{4-x}+1{,}7, \text{ если } x\leqslant 3.\end{cases}$