И. С. Козлова

ФОРМУЛЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА,

шпаргалка

Содержание

1. Основные определения кинематики 5
2. Кинематика поступательного движения. Скорость и ускорение 5
3. Различные виды движения 5
4. Законы Ньютона 5
5. Виды сил в механике 7
6. Законы сохранения в механике 7
7. Момент инерции твердого тела 7
8. Движение твердого тела 7
14. Теплоемкость. Виды теплоемкостей. Некоторые виды процессов 11
15. Изменение агрегатного состояния вещества 11
16. Химическое равновесие 11
17. Строение атома и периодическая система элементов 13
18. Виды химических связей ... 13
19. Виды химических реакций . 13
20. Растворимость. Теория электролитической диссоциации 13
31. Классификация органических соединений. Теория химического строения 19
32. Способы получения важнейших органических веществ 19
33. Некоторые реакции органических веществ 21
34. Химические методы качественного анализа 21
35. Уравнения и их решения 21
36. Иррациональные уравнения. Уравнения с модулем 21
46. Дифференциальные исчисления 27
47. Неопределенный интеграл 27
48. Определенный интеграл 27
49. Числовые последовательности. Ряды 29
50. Комплексные числа 29
51. Теория вероятностей 29
52. Метод математической индукции 29
53. Дифференциальные уравнения первого порядка 31

21. Водород 15
22. Галогены (VII группа) 15
23. Подгруппа кислорода 15
24. Подгруппа азота 15
25. Подгруппа углерода 17
26. Общие
свойства металлов 17
27. Металлы
главной подгруппы I группы 17
28. Металлы
главной подгруппы II группы 17
29. Элементы
главной подгруппы III группы 19
30. Металлы
побочных групп 19

54. Дифференциальные
уравнения второго порядка 31
55. Приближение функций 31
56. Приблизительное
вычисление интегралов 31

9. Механика
жидкостей и газов 9
10. Основные законы
и формулы
молекулярно-кинетической
теории 9
11. Основное уравнение
молекулярно-кинетической
теории 9
12. Термодинамическая
система
и термодинамические
процессы 9
13. Основные законы
термодинамики 11

37. Системы уравнений
и их решение 23
38. Векторная алгебра 23
39. Формулы приведения 23
40. Основные формулы
тригонометрии 23
41. Другие
тригонометрические
формулы 25
42. Предел функции 25
43. Матрицы 25
44. Аналитическая
геометрия на плоскости 25
45. Аналитическая
геометрия в пространстве 27

1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИКИ

Кинематика — раздел механики, изучающий движение тел без учета причин, вызывающих данное движение.

Движением называется изменение координат тела (его положения) с течением времени.

В качестве моделей в механике используются материальная точка, система материальных точек, твердое тело.

Материальная точка — абстрактное понятие, под которым понимается тело, обладающее массой, размерами которого можно пренебречь по сравнению с пройденным данным телом расстоянием.

Система материальных точек — макроскопическое тело, которое можно мысленно разделить на небольшие взаимодействующие между собой части.

Твердым называется тело, расстояние между любыми точками которого не изменяется при движении.

В кинематике рассматриваются различные **виды движений**:

1) **поступательное движение** — движение, при котором все точки тела проходят одинаковые расстояния за равные промежутки времени;
2) **вращательное движение**, при котором все точки тела движутся по-разному.

Любое движение определяется относительно системы отсчета.

Система отсчета — совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов.

2 КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

Скорость — векторная величина, характеризующая быстроту движения и его направленность. Единицей измерения скорости является 1 м/с. Различают среднюю и мгновенную скорость движения.

Средняя скорость — векторная величина, равная отношению вектора перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения.

Мгновенная скорость — первая производная от вектора перемещения по времени.

Мгновенная скорость определяет скорость в каждый конкретный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории движения тела в сторону перемещения.

Модуль мгновенной скорости — первая производная от пути по времени:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

3 РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ

1. **Равномерное прямолинейное движение** — движение, при котором за равные промежутки времени тело проходит одинаковые расстояния. Равномерное прямолинейное движение описывается следующими формулами:

$$v = v_0 = \text{const};$$

$$a = 0;$$

$$s = s_0 + vt.$$

2. **Равноускоренное прямолинейное движение** — движение, при котором за равные промежутки времени скорость изменяется одинаково. Для данного вида движения справедливы следующие формулы:

$$a = \text{const};$$

$$v = v_0 + at; \quad \langle v \rangle = v_0 + \frac{at}{2};$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

3. **Движение тела под действием силы притяжения земли.**

При движении к земле:

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad v = \sqrt{2gh},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \; h = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

где h — высота тела над поверхностью земли, g — ускорение свободного падения тела.

4 ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

I закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, относительно которых любое тело находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Система отсчета в I законе Ньютона называется **инерциальной системой отсчета**.

II закон Ньютона: ускорение, которое приобретает тело в результате взаимодействия, прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе данного тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В данном случае масса тела m является мерой инерции тела, F — сила, действующая на тело, a — ускорение.

II закон Ньютона справедлив только в применении к инерциальным системам отсчета.

Данный закон можно записать в другом виде:

$$F = \frac{dp}{dt},$$

где p — импульс тела.

III закон Ньютона: при всяком взаимодействии тел силы взаимодействия всегда возни-

Для проекций вектора скорости на декартовы координаты существуют следующие формулы:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}.$$

При движении на плоскости, когда изменяются две координаты тела, справедливы следующие формулы: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Ускорение — векторная величина, равная отношению изменения скорости к величине промежутка времени, за которое это изменение произошло. Единицы измерения ускорения 1 м^2/с.

Среднее ускорение определяется по формуле $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Мгновенное ускорение определяется как $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

У ускорения присутствуют тангенциальная составляющая $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, характеризующая изменение скорости по модулю, и нормальная составляющая $a_n = \frac{v^2}{r}$, характеризующая изменение скорости по направлению.

При этом полное ускорение находится по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Движение тела записывается двумя способами:

1) при помощи скалярных уравнений изменения координат:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t); \end{cases}$$

2) при помощи векторного уравнения:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Движение описывается также такими характеристиками, как траектория, длина пути, вектор перемещения.

Траектория — линия, вдоль которой движется тело относительно выбранной системы отсчета.

Длина пути — длина участка траектории, пройденного телом за определенное время.

Вектор перемещения — вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела при перемещении.

Вектор перемещения имеет вид:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиус векторы начального и конечного положения тела (векторы, соединяющие начало координат с соответствующим положением тела).

кают попарно; при этом данные силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Законы Ньютона имеют ряд **следствий**, применяемых при решении задач.

1. Если тело находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно, то действующие на него силы скомпенсированы, т.е. равнодействующая на данное тело сила равна нулю:

$$\sum \vec{F} = 0.$$

2. Если сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то равны нулю и суммы соответствующих проекций на оси координат:

$$\sum F_x = 0, \ \sum F_y = 0, \ \sum F_z = 0.$$

3. Если на тело действует несколько сил, то его уравнение движения имеет вид:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

4. При взаимодействии двух тел для них справедливо следующее соотношение:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

При движении вверх:

$$\vec{a} = \vec{g}, \ \vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{g}t, \ v = \sqrt{2gh},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

4. При **движении тела, брошенного под углом α к горизонту**, рассматриваются проекции кинематических уравнений на оси координат, направленные горизонтально и вертикально:

Ось x:

$$x = v_{0x} t, \ a_x = 0, \quad h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

где s — дальность броска,

h — максимальная высота подъема;

Ось y:

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_y = v_{0y} - gt,$$

$$a_y = g,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

5 ВИДЫ СИЛ В МЕХАНИКЕ

Все силы в механике можно разделить на две основные группы:

1) **консервативные силы** — силы, работа которых не зависит от траектории движения тела, а зависит только от начального и конечного положения тела (например, сила тяжести);
2) **диссипативные силы** — силы, работа которых зависит от траектории движения данного тела (например, сила трения).

Также **силы разделяются по природе**.

Сила тяжести, которая действует на все тела, находящиеся у поверхности Земли. Сила тяжести приложена к центру масс тела, направлена к центру Земли. Величина силы определяется по формуле

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

где g — ускорение свободного падения тел, которое у поверхности Земли равно 9,8 м/с^2;

Сила трения, возникающая при движении одного тела по поверхности другого. Сила трения приложена к точке соприкосновения двух тел, направлена в сторону, противоположную направлению движения тела.

Существует несколько видов трения: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

Трение покоя препятствует началу движения тела. Сила трения покоя по величине равна силе, приложенной к телу:

$$F_{\text{тр0}} = F.$$

6 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Импульсом называется векторная величина, равная произведению скорости тела на его массу:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс иногда называют количеством движения, т.е. импульс определяет меру действия тела.

Через импульс может быть выражен **второй закон Ньютона**:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Закон сохранения импульса имеет вид: в замкнутой системе (системе тел, на которую не действуют внешние силы или действием этих сил можно пренебречь) суммарный импульс системы является величиной постоянной при любых взаимодействиях:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i' = \text{const},$$

где p_i — импульс одного из тел до взаимодействия;
p_i' — импульс одного из тел после взаимодействия;
m — число тел системы до взаимодействия;
n — число тел системы после взаимодействия.

7 МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело — это такое тело, в котором не изменяется расстояние между его точками со временем.

Твердое тело может двигаться **поступательно**, когда каждая из точек тела проходит одинаковое расстояние за определенный промежуток времени; и **вращательно**, когда траектория движения различных частиц тела различна.

При изучении твердого тела его мысленно разделяют на множество элементарных (очень маленьких) частиц.

При этом каждая из частиц рассматривается в отдельности: рассматриваются массы данных элементарных частиц, их расстояние от оси вращения твердого тела, силы, действующие на них и др.

Каждая из частиц характеризуется моментом инерции:

$$J = m_i r_i^2,$$

где m_i — масса данной элементарной частицы;
r_i — расстояние от оси вращения до данной частицы.

Момент инерции всего твердого тела есть сумма моментов инерции всех его частей:

$$J = \sum_{n=1}^{n} m_i r_i^2.$$

8 ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При вращательном движении кинетическая энергия твердого тела определится по формуле

$$E_{\text{кинвр}} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси $_z$,
ω — угловая скорость движения (в радианах за секунду).

Если твердое тело совершает сложное движение — одновременно движется и поступательно и вращательно — его кинетическая энергия определяется по формуле

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где V_c — линейная скорость движения центра масс тела;
J_c — момент инерции тела относительно прямой, проходящей через центр масс.

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$M_z = J_z \varepsilon.$$

В данной формуле ε — угловое ускорение тела, J_z — момент инерции тела относительно оси z, M_z — проекция вектора момента сил на ось z.

Механическая энергия — способность тела совершать механическую работу.

Механическая энергия может быть двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетическая энергия — энергия движущегося тела. Она определяется по формуле

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе сил, действующих на тело:

$$E_{кин_2} - E_{кин_1} = A.$$

Потенциальная энергия — энергия, обусловленная взаимодействием тела с другими телами.

Потенциальной энергией обладает тело, находящееся на некоторой высоте над поверхностью земли:

$$E_{пот} = mgh$$

или тело, совершающее колебания на пружине:

$$E_{пот} = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная механическая энергия $W = E_{кин} + E_{пот}$ является постоянной величиной при любых взаимодействиях в закрытой системе. Это **закон сохранения энергии**.

Трение скольжения возникает, если тело скользит по поверхности другого тела. Трение скольжения является максимальной силой трения покоя. Сила трения скольжения определяется по формуле

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения скольжения, зависящий от природы соприкасающихся материалов;

N — сила реакции опоры.

При движении тела по горизонтальной поверхности

$$F_{тр} = \mu mg.$$

Сила реакции опоры возникает при нахождении одного тела на поверхности другого.

Данная сила приложена к центру масс и направлена перпендикулярно поверхности.

Сила упругости возникает, когда тело колеблется на пружине.

Сила приложена к точке соединения пружины и тела и направлена в сторону, противоположную перемещению:

$$\vec{F}_{упр} = -kx,$$

где x — перемещение под действием силы упругости;

k — жесткость пружины.

Момент сил — равная векторному произведению величины силы и радиуса вектора точка приложения силы относительно выбранной точки:

$$M = F \times r \times \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами F и r.

При вращательном движении твердого тела выполняется **закон сохранения момента** импульса: в замкнутой системе (на которую не действуют внешние силы) момент импульса является величиной постоянной:

$$L = const.$$

Так как L — постоянная величина в замкнутой системе, то для данной системы справедливо уравнение:

$$\frac{dL}{dt} = 0.$$

Если система не замкнута, производная от момента импульса по времени равна моменту внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Приведем **формулы моментов инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы**:

1) цилиндр, вращающийся вокруг оси, проходящей через цент масс:

$$J = \frac{1}{2} mR,$$

где m — масса цилиндра,
R — его радиус;

2) полый тонкостенный цилиндр относительно оси симметрии:

$$J = mR^2;$$

3) прямой тонкий стержень относительно оси, перпендикулярной ей и проходящей через центр стержня:

$$J = \frac{1}{12} ml^2,$$

где l — длина стержня;

4) прямой тонкий стержень относительно прямой, проходящей через его конец:

$$J = \frac{1}{3} ml^2;$$

5) шар относительно прямой, проходящей через его центр:

$$J = \frac{2}{5} mR^2,$$

где R — радиус шара.

9 МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

При решении задач и рассмотрении законов жидкости и газы вне зависимости от своего вида описываются одинаковыми уравнениями, так как различий между жидкостями и между газами пренебрежительно мало.

Давление в жидкости — сила, с которой жидкость действует на перпендикулярную поверхность:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Закон Паскаля: если жидкость находится в покое, то давление жидкости одинаково по всему объему:

$$p_1 = p_2,$$

следовательно: $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$.

Закон Архимеда: на любое тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости или газа в данном объеме:

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ — плотность жидкости или газа;
g — ускорение свободного падения;
V — объем погружаемого тела.

10 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Молекулярно-кинетическая теория изучает макроскопические тела, рассматривая совокупность всех частиц, из которых состоит тело. В молекулярно-кинетической теории применяются статистические методы.

Существует **три начала термодинамики**.

1. Все вещества состоят из молекул, а молекулы состоят из атомов. **Молекула** — наименьшая частица вещества, обладающая свойствами целого вещества, соединенного химическими связями. **Атом** — химически неделимая частица вещества. Размеры атомного ядра составляют 10^{-15}м., масса молекул порядка 10^{-25}м.

2. Все молекулы вещества находятся в постоянном и непрерывном движении. Данное движение называется тепловым. Скорости движения молекул зависят от агрегатного состояния вещества и от его температуры. Скорости молекул имеют различные значения. Скорости молекул определяются по распределению Максвелла по скоростям:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}},$$

где $f(v)$ — число молекул, скорости которых лежат в интервале от n до n + dn;
m_0 — масса молекулы;
T — температура вещества;
k — постоянная Больцмана.

11 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории рассматривается для одноатомного идеального газа.

Идеальным называется газ, молекулы которого не взаимодействуют между собой; все соударения молекул абсолютно упругие.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории имеет вид:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle,$$

где p — давление идеального одноатомного газа;
n — концентрация молекул;
m_0 — масса молекулы;
v^2 — квадрат средней скорости.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории может быть записано в различных видах с учетом основных уравнений термодинамики и молекулярно-кинетической теории.

Если учесть, что $n = \frac{N}{V}$, уравнение примет вид:

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{кв} \rangle^2,$$

где p — давление идеального газа;
V — объем идеального газа;
N — количество молекул в веществе.

12 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Термодинамика — раздел молекулярной физики, изучающий термодинамические системы с использованием термодинамических параметров.

Термодинамическими называются системы, состоящие из макроскопических тел, взаимодействующих между собой и передающих энергию друг другу.

Термодинамическими параметрами называются величины, описывающие термодинамическую систему целиком (температура T, объем V, давление p).

Температура — физическая величина, характеризующая состояние макроскопической системы, зависящая от скорости движения молекул вещества.

В СИ температура измеряется в градусах Кельвина [К].

Для того чтобы перевести температуру из градусов Цельсия t в градусы Кельвина T применяется формула

$$T = t + 273{,}15.$$

Термодинамическим процессом называется изменение хотя бы одного из параметров термодинамической системы.

Среди термодинамических процессов выделяются изопроцессы, при которых один из параметров остается постоянным.

Наивероятная скорость движения молекул определяется по формуле:

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}},$$

где M — молярная масса вещества;

$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \times K}$ — универсальная газовая постоянная;

$k = 1{,}38 \times 10^{-23} \frac{Дж}{K}$ — постоянная Больцмана.

Среднеквадратичная скорость движения молекул находится по формуле

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Средняя скорость молекулы определяется по формуле $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$.

3. Все молекулы взаимодействуют между собой. При этом, если расстояние между молекулами меньше размера молекулы, молекулы отталкиваются, если расстояние больше одной молекулы, молекулы притягиваются.

Виды взаимодействия между молекулами вещества зависят от агрегатного состояния вещества. В некоторых случаях величинами этих сил пренебрегают, например при рассмотрении газов (модель идеального газа).

Изотермический процесс — процесс, происходящий при постоянной температуре. Он описывается **законом Бойля — Мариотта**:

$$pV = \text{const}.$$

Изобарический процесс — процесс, происходящий при постоянном давлении. Описывается **законом Гей-Люссака**:

$$\frac{V}{T} = \text{const}.$$

Изохорический процесс — процесс, происходящий при постоянном объеме. Описывается **законом Шарля**:

$$\frac{p}{T} = \text{const}.$$

Любое состояние идеального газа можно описать с помощью **уравнения Клапейрона**:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

или **уравнения Менделеева—Клапейрона**:

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где m — масса газа;
M — молярная масса газа;

$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \times K}$ — универсальная газовая постоянная.

Гидростатическое давление жидкости определяется по формуле

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости;
g — ускорение свободного падения;
h — высота столба жидкости.

При движении жидкости выполняется уравнение непрерывности струи:

$$Sv = \text{const};$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

где S_1, S_2 — сечения соответствующих трубок тока;
v_1, v_2 — скорости жидкостей в данных трубках тока.

Если жидкость течет по трубке с разными уровнями, для нее выполняется уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где ρ — плотность жидкости;
v — скорость движения жидкости;
p — статическое давление жидкости.

Если учесть, что $E = N\frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}$, уравнение примет вид:

$$pV = \frac{2}{3}N\frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3}E,$$

где E — кинетическая энергия движения молекул вещества.

Если учесть, что $m = N \times m_0$, уравнение примет вид:

$$pV = m\langle v_{кв} \rangle^2.$$

Для одного моля газа уравнение примет вид:

$$pV = \frac{1}{3}M\langle v_{кв} \rangle^2;$$

$$p = nkT,$$

где k — температура вещества;
T — температура вещества.

13 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамика рассматривает явления передачи энергии от одного тела к другому. Среди основных **параметров термодинамики** выделяются:

1) внутренняя энергия термодинамической системы — сумма кинетических и потенциальных энергий молекул вещества, измеряемая в джоулях [Дж].
   Для идеального газа она определяется по формулам

$$U = \frac{i}{2}\nu RT,$$

где ν — количество вещества [моль];
i — количество степеней свободы молекул. Для одноатомного газа $i = 3$, для двухатомного $i = 5$.

$$U = \frac{i}{2}pV;$$

2) количество теплоты $[Q]$ — тепло, передаваемое от одного тела к другому;
3) работа газа A, которая определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V,$$

14 ТЕПЛОЕМКОСТЬ. ВИДЫ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПРОЦЕССОВ

Теплоемкость — физическая величина, определяющая какое количество теплоты необходимо сообщить веществу для изменения его температуры на 1К.

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

Единицы измерения теплоемкости $\left[1\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right]$.

Существует несколько видов теплоемкостей.

1. Удельная теплоемкость

$$c = \frac{\mathrm{d}Q}{m\,\mathrm{d}T},$$

единицы измерения которой $1\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}$.

2. Молярная теплоемкость

$$C_m = \frac{\mathrm{d}Q}{\nu\,\mathrm{d}T},$$

единицы измерения которой $1\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\times\text{К}}$.

Молярная и удельная теплоемкости связаны следующим соотношением

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса вещества.

15 ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Вещество находится в одном из **трех агрегатных состояний**: твердом, жидком и газообразном.

Критерием определения состояния являются расстояния между молекулами вещества и величины потенциальных энергий взаимодействия. Вещество может менять свое агрегатное состояние в результате одного из следующих процессов.

Твердое вещество имеют строгую форму и жестко связанные между собой молекулы; жидкости сохраняют объем, но не форму, молекулы **жидкости** связаны, но меняют взаимное положение; **газообразные вещества** не имеют формы и объема, молекулы слабо связаны между собой.

Изменение агрегатного состояния может произойти при условии подведения или отвода теплоты.

Испарение (парообразование) — переход из жидкого состояния в газообразное. Количество теплоты, потребляемое веществом при испарении, определяется по формуле

$$Q = rm,$$

где m — масса жидкости;
r — удельная теплота парообразования, зависящая от свойств данной жидкости.

Конденсация — процесс перехода из газообразного состояния в жидкое. При конденса-

16 ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

1. Закон сохранения массы веществ (***Ломоносов***, 1748 г.): масса веществ, вступивших в химическую реакцию, равна массе веществ, образовавшихся в результате реакции.

2. Закон постоянства состава (***Пруст***, 1801—1808 гг.): всякое чистое вещество независимо от его происхождения и способа получения имеет один и тот же состав.

3. Закон ***Авогадро*** (1811 г.): равные объемы различных газов содержат при одинаковом давлении и одинаковой температуре равное число молекул.

4. Закон ***Бойля-Мариотта***: при постоянной температуре объем данного количества газа обратно пропорционален давлению, под которым он находится:

$$pV = \text{const}.$$

5. Закон ***Гей-Люссака***: при постоянном давлении изменение объема газа пропорционально температуре:

$$p/V = \text{const}.$$

6. Объединенный закон ***Гей-Люссака*** и ***Бойля-Мариотта***:

$$pV/T = \text{const}.$$

3. Молярная теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{dU}{dT},$$

где U — внутренняя энергия вещества.

$$C_V = \frac{i}{2}R,$$

где i — число степеней свободы молекул газа;
R — универсальная газовая постоянная.

4. Молекулярная теплоемкость при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{p\,dV}{dT},$$

где p — давление газа;
V — объем газа.

Теплоемкость при постоянном давлении и теплоемкость при постоянном объеме связаны между собой уравнением Майера: $C_p = C_v + R$.

Политропный процесс — процесс, происходящий при постоянной теплоемкости. Он записывается уравнением $pV^n = \text{const}$, где $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$.

Адиабатический процесс — процесс, происходящий без теплообмена со внешней средой: $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

которая при изобарическом процессе принимает вид:

$$A = p\Delta V,$$

а при изохорическом процессе $A = 0$.

Первый закон термодинамики является проявлением закона сохранения энергии для термодинамического процесса: количество теплоты, передаваемое веществу, расходуется на изменение его внутренней энергии и на совершение работы над внешними силами:

$$Q = \Delta U + A.$$

Второй закон термодинамики: невозможен такой процесс, при котором тепло самопроизвольно передается от более нагретого тела к менее нагретому.

Третий закон термодинамики: энтропия системы стремится к нулю при стремлении к нулю температуры тела.

$$\lim_{T \to 0} S = 0.$$

Энтропия — величина, пропорциональная числу микросостояний, с помощью которых осуществляется данное макросостояние.

$$S = k \ln W.$$

7. Уравнение ***Менделеева-Клапейрона***:

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Скорость химической реакции — изменение концентрации одного из реагирующих веществ в единицу времени при неизменном объеме системы:

$$v = \left|\frac{\Delta c}{\Delta t}\right|.$$

8. Кинетическое уравнение ***Гульдберга*** и ***Вааге*** (1867 г.): скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ:

$$v = kc_A^{\,n} \times c_B^{\,m}.$$

Реакции, в которых все вещества (вступающие в реакцию и продукты реакции) образуют однородную смесь, называются гомогенными, остальные — гетерогенными. Скорость гетерогенных реакций прямо пропорциональна величине поверхности соприкосновения реагирующих веществ.

9. Правило ***Вант-Гоффа***: при повышении температуры на каждые 10 °С скорость большинства реакций увеличивается в 2—4 раза:

$$v_{t_2} = v_{t_1}\gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}},$$

где γ — температурный коэффициент реакции.

ции газ выделяет в окружающую среду количество теплоты:

$$Q = rm.$$

Плавление — процесс перехода из твердого состояния в жидкое. При этом количество теплоты, потребляемое веществом, находится по формуле

$$Q = \lambda m,$$

где m — масса твердого вещества;
λ — удельная теплота плавления твердого тела, зависящая от его свойств.

Кристаллизация — процесс перехода из жидкого состояния в твердое. При этом в окружающее пространство выделяется количество теплоты

$$Q = \lambda m.$$

Сублимация (возгонка) — переход из твердого состояния в газообразное.

Данные переходы называются фазовыми переходами первого рода.

Фазовые переходы второго рода — переходы, при которых не происходит выделения или поглощения количества теплоты.

17 СТРОЕНИЕ АТОМА И ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ

Атом — наименьшая частица вещества, которую невозможно разделить химически.

По протонно-нейтронной теории строения атома в его состав входят протоны, число которых Z, нейтроны, число которых N выражается формулой $N = A - Z$.

В данной формуле A — массовое число, которое характеризует число протонов и нейтронов в ядре.

Между протонами и нейтронами в ядре существуют ядерные силы, обеспечивающие целостность ядра.

Все химические элементы располагаются в определенном порядке в зависимости от массового и зарядового числа. Этот порядок называется **Периодической системой химических элементов Д. И. Менделеева**.

Зарядовое число Z определяется по порядковому номеру элемента в Периодической системе. Число протонов определяется по формуле $N = A - Z$, когда массовое число определяется из периодической таблицы.

В Периодической системе выделяются семь периодов — горизонтальных последовательностей элементов, в каждой из которой элементы расположены в соответствии с возрастанием номера элемента. Также выделяются 8 групп, в каждой из которых элементы являются однотипными по электронной конфигурации.

Координата элемента в таблице определяется номером периода и номером группы.

18 ВИДЫ ХИМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Перечислим основные виды химических связей неорганических веществ

Ковалентная связь, возникающая в результате образования общих электронных пар во взаимодействующих атомах.

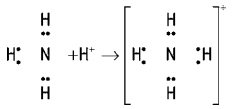
Такой связью атомы газов связаны в молекулы. В атоме водорода происходит перекрывание s-орбиталей с антипараллельными спинами:

$$\dot{H} + \dot{H} = H{:}H.$$

Неполярной ковалентной связью называется такая связь, при которой взаимодействуют вещества с одинаковой электроотрицательностью. Она образуется общими электронными парами.

Полярной ковалентной связью называют связь, при которой взаимодействуют вещества с близкой по значению электроотрицательностью. Молекулы с такой связью называют диполями, так их электронные облака смещены.

Донорно-акцепторная связь отличается от обычной ковалентной происхождением. Примером образования донорно-акцепторной связи является получение иона аммония:



По способу перекрывания электронных облаков принято различать π- и σ-связи.

19 ВИДЫ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Химические реакции классифицируются по ряду признаков.

По направлению изменения энергии выделяют:

1) реакции с выделением теплоты, которые называются **экзотермическими** (соединение металлов с серой и хлором, нейтрализация кислот, взаимодействие оксида кальция с водой, горение):

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O.$$

Для данной реакции тепловой коэффициент, т.е. количество тепла, выделяемое при реакции $\Delta H = -571{,}6$ кДж;

2) реакции с поглощением теплоты, называемые **эндотермическими** (образование оксида азота):

$$N_2(г) + O_2(г) \rightarrow 2NO(г).$$

Для данной реакции $\Delta H = 180{,}8$ кДж.

По характеру изменения числа начальных и конечных веществ:

1) **реакции разложения**, из одного исходного вещества получается несколько:

$$2HgO \rightarrow 2H + O_2;$$

2) **реакции соединения**, при которых из нескольких начальных веществ получается одно конечное:

$$2Cu + O_2 \rightarrow 2CuO;$$

20 РАСТВОРИМОСТЬ. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ДИССОЦИАЦИИ

Растворимость — свойство вещества, определяющее его способность растворяться в определенном виде растворителя.

По этому свойству вещества разделяют на хорошо растворимые (нитраты серебра, аммиак), слаборастворимые (азот, кислород, оксиды кальция) и нерастворимые (золото, инертные газы).

Растворимость определяется природой вещества.

На растворимость веществ влияет ряд внешних факторов: температура, давление, присутствие других элементов.

Для твердых веществ свойственно повышение растворимости с ростом температуры.

Одновременно с растворением может идти обратный процесс **кристаллизации** веществ.

Раствор называется **насыщенным**, если он содержит максимально возможное количество растворяемого вещества для данной температуры.

Раствор называется **ненасыщенным**, если содержащееся в нем количество твердого вещества меньше, чем содержание в насыщенном растворе.

Раствор называется **перенасыщенным**, если он содержит больше твердого вещества, чем насыщенный раствор при данной температуре. Перенасыщенный раствор образуется путем быстрого охлаждения насыщенного раствора.

***σ*-связь** образуется в результате перекрывания электронных орбитатей по направлению линии, которая соединяет ядра атомов.

***π*-связь** образуется в результате перекрывания электронных орбиталей по обе стороны от линии, проходящей через ядра атомов.

Водородная связь — связь, образующаяся в веществе, молекулы которого содержат электроотрицательные атомы. Такие атомы обладают неподеленной электронной парой.

Межмолекулярная водородная связь образуется у атомов водорода с ярко выраженными отрицательными элементами (соединения кислорода, фтора, азота).

Внутримолекулярная водородная связь чаще всего встречается в органических веществах.

Ионная связь возникает между ионами за счет действия электростатических сил. Такой связью связаны атомы с большими отличиями в электроотрицательности (соли щелочных металлов). Ярким примером является NaCl. Атом натрия ($1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$) имеет один электрон на внешнем s-уровне. Атом хлора ($1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$) на внешнем уровне имеет 7 электронов. Заряд от атома натрия переносится к атому хлора, в результате чего образуются ионы

$$Na^0 - e^- \rightarrow Na^-,$$

$$Cl^0 + e^- \rightarrow Cl^-,$$

между которыми появляются силы электрического притяжения.

Три первые периода системы являются малыми, остальные — большими. Каждый из периодов начинается с щелочного металла и заканчивается инертным газом.

Малые периоды содержат по одному ряду, большие по два ряда (четный и нечетный). В состав четных рядов входят металлы, свойства которых слева направо изменяются слабо.

Некоторые элементы в Периодической системе объединяют в группы по наличию общих свойств. Элементы, номера которых от 58 до 71, называются лантаноидами, элементы, номера которых от 90 до 103, называются актиноидами.

В Периодической системе в малых периодах и нечетных рядах больших периодов с ростом порядкового номера уменьшаются металлические свойства веществ и увеличиваются неметаллические, что связано с увеличением ионного потенциала с ростом порядкового номера.

В таблице Менделеева все элементы делятся на 4 семейства по строению электронных оболочек: s-, p-, d-, f-элементы.

Для s-элементов характерно заполнение s-подуровня внешнего уровня; к ним относятся первые два элемента. Для p-элементов характерно заполнение p-подуровня; к ним относятся следующие 6 элементов. D-семейство составляют переходные элементы, в которых электроны заполняют d-подуровень второго снаружи уровня; это элементы больших периодов, расположенные между s- и p-элементами. Семейство f-элементов составляют лантаноиды и актиноиды.

Растворимость веществ характеризуют **коэффициентом растворимости** — это масса вещества, которая способна раствориться в 100 г. растворителя при определенной температуре.

Электролитической диссоциацией называется распад в растворе электролита на составляющие его ионы.

Электролитическая диссоциация наблюдается при пропускании через раствор электролита электрического тока.

В результате создания разности потенциалов полярная молекула солей металлов (NaCl) растягивается: положительный полюс молекулы притягивается отрицательным электродом, отрицательный полюс молекулы — положительным.

В результате ослабляется ионная связь и молекула разделяется на ионы:

$$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-.$$

На ионы распадаются молекулы и ионной связью, и с полярной ковалентной связью.

Понятие об электролитической диссоциации впервые было введено и изучено ***С. Аррениусовым*** (1887 г.).

Он показал, что с увеличением концентрации электролитического раствора скорость диссоциации не изменяется, она зависит в основном от вида связей вещества и величины ионизационного потенциала молекулы и др.

3) **реакции замещения**, при которых участвуют простые и сложные вещества, причем простое вещество в результате реакции заменяет один из элементов сложного вещества:

$$Fe + CuSO_4 \rightarrow FeSO_4 + Cu;$$

4) **реакции обмена**, в которых участвуют несколько сложных веществ, обменивающихся своими составными элементами:

$$Na_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow BaSO_4\downarrow + 2NaCl;$$

5) **реакции нейтрализации**, в которых участвуют кислоты и основания, их конечными продуктами являются соль и вода:

$$KOH + HCl \rightarrow KCl + H_2O.$$

По обратимости реакции разделяют на **обратимые** и **необратимые**. При записи обратимых реакций вместо значка → используется значок ↔.

По характеру изменения степени окисления составных частей веществ реакции разделяют на **окислительно-восстановительные** и **нейтральные**.

21 ВОДОРОД

Водород (H) является первым элементом в Периодической системе. Это самый простой по своему составу атом. Относительная атомная масса 1,0079.

Первому выделить водород из кислот удалось ***Г. Кавендишу*** (1766 г.).

Водород — самый распространенный в галактике химический элемент, так как он входит в состав большинства звезд.

В состав атома водорода входит ядро, состоящее из одного протона, и электрона. При отщеплении электрона

$$H \rightarrow H^+ + e^-$$

водород приобретает металлические свойства.

При присоединении электрона

$$H + e^- \rightarrow H^-$$

водород приобретает свойства галогенов. Поэтому водород относят и к 1-ой и к 7-ой группе Периодической таблицы.

Два атома водорода, соединенные ковалентной связью, образуют молекулу водорода.

Водород является химически малоактивным веществом.

Водород образует галогеноводороды при реакции с неметаллами

$$H_2 + Cl_2 \xrightarrow{t} 2HCl.$$

22 ГАЛОГЕНЫ (VII ГРУППА)

Галогенами называют элементы 7 группы главной подгруппы в Периодической системе элементов.

К галогенам относят хлор Cl, фтор F, йод I, бром Br, астат At.

В переводе с греческого галогены означает «рождающие соль».

Галогены очень легко вступают в химические реакции, поэтому фактически не встречаются в свободном состоянии.

В свободном состоянии галогены образуют двухатомную молекулу с неполярной ковалентной связью.

Галогены являются типичными неметаллами.

Галогены легко вступают в реакции с атомами, на наружном электронном слое которых находится по одному электрону:

$$2Na + Cl_2 \rightarrow 2NaCl.$$

Галогены обладают сильными окислительными свойствами, их степень окисления отрицательна (иногда может быть положительной).

Галогены проявляют нечетную степень окисления, так как их электроны Cl, I, At, Br способны возбуждаться последовательно и переходить из s- и p-подуровня на подуровни d-уровня.

23 ПОДГРУППА КИСЛОРОДА

Подгруппа кислорода включает в себя кислород O, серу S, селен Se, теллур Te, полоний Po. Эти элементы являются p-элементами Периодической системы элементов.

Их объединяют названием халькогены, что означает «образующие руду».

Халькогены имеют по шесть электронов на внешнем электронном уровне. Кислород в отличие от других халькогенов не имеет d-подуровня на внешнем уровне, его валентность всегда равна двум. Степень окисления кислорода -2, в соединениях с фтором +2, в перексиде водорода –1.

Для остальных элементов подгруппы характерно изменение валентности из-за перехода s- и p-электронов на d-подуровень внешнего уровня.

В результате их валентность может составлять 2, 4, 6. Их степени окисления будут при этом принимать значения –2, +2, +4, +6.

Халькогены с водородом образуют водородные соединения — H_2O, H_2S, H_2Se, H_2Te, которые называют халькогеноводородами. Их устойчивость уменьшается с ростом числа частиц халькогена.

Теллур, селен и сера образуют кислородные соединения (SO_2 и SO_3), которым соответствуют кислоты (H_2SO_4 – сильная кислота, H_2SeO_3 и H_2TeO_3 — слабые кислоты).

Для халькогенов характерно увеличение радиуса атома и уменьшение электроотрицательности элементов с ростом порядкового номера

24 ПОДГРУППА АЗОТА

Подгруппа азота является г**лавной подгруппой V группы**. К ним относятся азот N, фосфор P, мышьяк As, сурьма Sb и висмут Bi. Эти вещества относят к p-элементам. Для них характерно наличие пяти электронов на внешнем энергетическом уровне.

На внешнем энергетическом уровне этих элементов находятся три неспаренных электрона, следовательно, их валентность в нормальном состоянии равна трем.

Азот ($1s^2 2p^2 2d^3$) способен отдать один электрон с 2s-подуровня и стать четырехвалентным ионом. Для этого элемента энергия ионизации 14,5 эВ, относительная электроотрицательность 3,07, радиус атома 0,071 нм, степень окисления в соединениях +5, +4, +3, +2, +1, –3, –2, –1, температура плавления –210 °C, температура кипения –196 °C.

Для остальных элементов валентность может стать равной пяти из-за наличия вакантной ячейки d-подуровня на внешних энергетических уровнях. В результате при возбуждении 3s– электроны разъединяются и переходят на d– подуровень, что приводит к образованию пяти валентных электронов.

Элементы подгруппы азота образуют соединения с водородом (NH_3, PH_3, AsH_3, SbH_3), соединения с кислородом — оксиды (N_2O_3 и N_3O_5, P_2O_3 и P_2O_5, и др.), которым соответствуют кислоты (HNO_2, HNO_3, HPO_2, HPO_3 и др.) и ортокислоты (H_3PO_4 и другие, кроме азота).

В данной подгруппе у веществ убывают неметаллические и возрастают металлические

Самой большой реакционной способностью обладает F, самой маленькой – I. Галогены способны замещать в соединениях менее реакционноспособные галогены:

$$2KI + Cl_2 \rightarrow 2KCl + I_2;$$

$$2I^- + Cl_2 \rightarrow 2Cl^- + I_2;$$

$$2KBr + Cl_2 \rightarrow 2KCl + Br_2;$$

$$2Br^- + Cl_2 \rightarrow 2Cl^- + Br_2.$$

При соединении галогенов с водородом образуются кислоты: HF — плавиковая (фтороводородная) кислота; HCl — соляная (хлороводородная) кислота, HBr — бромоводородная кислота; HI — иодоводородная кислота.

Из вышеперечисленных **самой сильной** является иодоводородная кислота, **самой слабой** — фтороводородная кислота. Это вызвано уменьшением связи «водород — галоген» от йода к фтору.

Водород может гореть в кислороде. В результате этой реакции образуется вода и выделяется большое количество теплоты:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O.$$

Водород вступает в реакцию с азотом при наличии катализаторов:

$$3H_2 + N_2 \rightarrow 2NH_3.$$

При высокой температуре водород способен вступать в реакцию с щелочными металлами:

$$2Na + H_2 \rightarrow 2NaH.$$

При повышении температуры водород способен выступать в качестве восстановителя для оксидов многих металлов:

$$CaO + H_2 \rightarrow H_2O + Ca.$$

свойства и, растет порядковый номер частиц. **Азот** — неметалл, висмут — металл. Также с увеличением номера уменьшается прочность водородных соединений и увеличивается прочность кислородных соединений.

Молекула азота состоит из двух атомов, молекулы фосфора, мышьяка и сурьмы в парах при высокой температуре четырехатомны. Висмут образует двухатомные молекулы.

Молекула азота обладает большой прочностью, что обусловливает ее низкую химическую активность. Повысить активность возможно при нагревании (что нежелательно) или применением катализаторов. Азот при высоких температурах вступает в реакцию с металлами (образуются нитриты), с кремнием и с фосфором (в условиях электрической искры).

Фосфор проявляет некоторые металлические свойства.

Для фосфора характерны следующие свойства: энергия ионизации 10,5 эВ, относительная электроотрицательность 2,1, радиус атома 0,13 нм, степень окисления в соединениях +5, +4, +3, +1, –3, –2, температура плавления 44 °С, температура кипения 280 °С.

Для мышьяка характерны следующие свойства: энергия ионизации 9,8 эВ, относительная электроотрицательность 2,2, радиус атома 0,15 нм, степень окисления в соединениях+5, +3, –3, температура плавления 610 °С, температура кипения 1380 °С.

в периодической системе элементов. Также при этом ослабевают неметаллические свойства и увеличиваются металлические.

Рассмотрим основные свойства каждого из халькогенов.

Кислород имеет энергию ионизации 13,62 эВ, относительную электроотрицательность 3,5, радиус атома 0,066 нм, температуру плавления –218,8 °С, температуру кипения –183 °С.

Для серы энергия ионизации 10,36 эВ, относительная электроотрицательность 2,6, радиус атома 0,104 нм, степень окисления в соединениях –2, +2, +4, +6, температура плавления 119,3 °С, температура кипения 444,6 °С.

Для селена энергия ионизации 9,75 эВ, относительная электроотрицательность 2,48, радиус атома 0,117 нм, степень окисления в соединениях –2, +4, +6, температура плавления 217 °С, температура кипения 685 °С.

Для теллура энергия ионизации 9,01 эВ, относительная электроотрицательность 2,01, радиус атома 0,137 нм, степень окисления в соединениях –2, +4, +6, температура плавления 449,8 °С, температура кипения 990 °С.

Для полония энергия ионизации 8,43 эВ, относительная электроотрицательность 1,76, радиус атома 0,164 нм, степень окисления в соединениях –2, +2, температура плавления 254 °С, температура кипения 962 °С.

25 ПОДГРУППА УГЛЕРОДА

Подгруппа углерода является главной подгруппой четвертой группы. К ней относятся углерод C, кремний Si, германий Ge, олово Sn, свинец Pb.

Все атомы данных элементов имеют похожие внешние электронные оболочки s^2p^2.

Углерод – очень распространенный на Земле элемент. В его цепи –C–C–C–C– прочность не зависит от длины, так как σ-связи мало взаимодействуют, а если появляется π-связь, то прочность цепи увеличивается.

Атомы углерода могут входить в состав молекул в различных валентных состояниях: существуют соединения с трех- и двухвалентным углеродом.

При увеличении порядкового номера элемента увеличиваются их атомные радиусы (для углерода 0,077 нм, для кремния 0,134 нм, для германия 0,139 нм, для олова 0,158 нм, для свинца 0,175 нм), уменьшается энергия ионизации атомов (для углерода 11,3 эВ, для кремния 8,2 эВ, для германия 7,9 эВ, для олова 7,3 эВ, для свинца 6,0 эВ), усиливаются металлические свойства.

Углерод и кремний являются неметаллами; германий относят и к металлам, и к неметаллам; олово, свинец — металлы.

Кремний не образует прочных соединений с водородом и не способен образовывать цепи. Велика прочность соединения кремния с кислородом. Кремний в щелочной среде разлагает воду, что характерно для металлических веществ. В невозбужденном состоянии кремний

26 ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ

К металлам относят вещества, для которых свойственны высокая электро- и теплопроводность, металлический блеск, ковкость, пластичность.

Если в Периодической таблице элементов провести диагональ от бора к астату, то слева будут находится металлы, а справа (кроме инертных газов) — неметаллы.

На самой диагонали будут находиться особые вещества — **металлоиды**, обладающие свойствами металлов и неметаллов (бор, кремний, германий, мышьяк, сурьма, теллур, полоний).

В кристаллической решетке металлов свободно перемещаются свободные электроны, чем и обуславливается их электропроводность. Из 107 известных элементов 85 являются металлами.

Металлы могут являться элементами побочных подгрупп или элементами основных подгрупп.

В металлах главной подгруппы s- и p-подуровни заполняются последовательно. Для металлов побочной подгруппы характерно достраивание d- и f-одуровней.

Тепло и электропроводность металлов уменьшается слева направо в ряду:

Ag Cu Au Al Mg Zn Fe Pb Hg.

27 МЕТАЛЛЫ ГЛАВНОЙ ПОДГРУППЫ I ГРУППЫ

Металлы главной подгруппы первой группы Периодической системы элементов называются **щелочными металлами**.

К ним относятся литий Li, натрий Na, калий K, Рубидий Rb, цезий Cs, франций Fr.

Эти металлы серебристо-белого цвета, обладающие высокой активностью, возрастающей с увеличением порядкового номера. Степень окисления щелочных металлов равна +1, так как у них имеется по одному свободному электрону, который они легко отдают.

Из-за повышенной активности щелочные металлы не встречаются в природе в чистом виде, встречаются в виде соединений. Самыми распространенными из щелочных металлов являются литий, рубидий и цезий.

Литий обладает плотностью 0,534 г/см^3, температурой плавления 180,5 °C.

Натрий обладает плотностью 0,968 г/см^3, температурой плавления 97,9 °C.

Калий обладает плотностью 0,862 г/см^3, температурой плавления 63,55 °C.

Рубидий обладает плотностью 1,532 г/см^3, температурой плавления 39,8 °C.

Цезий обладает плотностью 1,90 г/см^3, температурой плавления 28,5 °C.

Франций обладает плотностью 2,1—2,4 г/см^3, температурой плавления 20 °C.

28 МЕТАЛЛЫ ГЛАВНОЙ ПОДГРУППЫ II ГРУППЫ

К металлам главной подгруппы II группы Периодической системы элементов относятся бериллий Be, магний Mg, кальций Ca, стронций Sr, барий Ba, радий Ra.

Эти металлы называют **щелочно-земельными**.

По сравнению с щелочными металлами, металлы данной подгруппы более твердые, но обладают меньшей реакционной способностью.

Бериллий и магний несколько отличаются от других щелочно-земельных металлов.

Щелочно-земельные металлы (кроме радия) являются легкими металлами.

Как и щелочные, щелочно-земельные металлы не встречаются в природе в чистом виде.

На внешнем энергетическом уровне данных элементов находится по два электрона, поэтому в соединениях металлы проявляют валентность, равную двум.

Бериллий обладает плотностью 1,85 г/см^3, температурой плавления 1284 °C.

Магний обладает плотностью 1,74 г/см^3, температурой плавления 650 °C.

Кальций обладает плотностью 1,54 г/см^3, температурой плавления 842 °C.

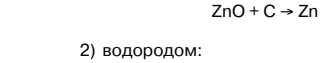
Стронций обладает плотностью 2,63 г/см^3, температурой плавления 768 °C.

Барий обладает плотностью 3,76 г/см^3, температурой плавления 727 °C.

Радий обладает плотностью 6 г/см^3, температурой плавления 969 °C.

Существует **несколько путей получения металлов**:

1) восстановление из оксидов углеродом:

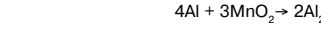


$$ZnO + C \rightarrow Zn + CO;$$

2) водородом:

$$CoO + H_2 \rightarrow Co + H_2O;$$

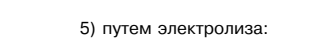
3) алюминотермией:



$$4Al + 3MnO_2 \rightarrow 2Al_2O_3 + 3Mn;$$

4) обжигая сульфиды и металлов и восстанавливая их из оксидов:

$$2ZnS + 3O_2 \rightarrow 2ZnO + 2SO_2;$$



$$ZnO + C \rightarrow CO + Zn;$$

5) путем электролиза:

$$CuCl_2 \rightarrow Cu^{2+} + 2Cl^-.$$

По химическим свойствам металлы являются восстановителями, так как легко отдают свободные электроны.

малоактивен, окисляется при повышении температуры.

Для кремния характерны следующие свойства: относительная электроотрицательность 1,74, степень окисления в соединениях+4, +2, –4, температура плавления 1420 °С, температура кипения 3300 °С.

Германий используется как полупроводниковый материал. Он является рассеянным элементом, по химическому характеру амфотерен.

Для германия характерны следующие свойства: относительная электроотрицательность 2,02, степень окисления в соединениях+4, –4, температура плавления 936 °С, температура кипения 2850 °С.

Олово и свинец — типичные металлы. Свинец более часто встречается в соединениях с валентностью, равной 2, олово — равной 4.

Двухвалентное олово — сильный восстановитель, четырехвалентной свинец — сильный окислитель.

Для олова характерны следующие свойства: относительная электроотрицательность 7,3, степень окисления в соединениях +4, +2, –4, температура плавления 231,9 °С, температура кипения 2620 °С.

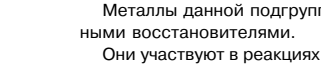
Для свинца характерны следующие свойства: относительная электроотрицательность 6,0, степень окисления в соединениях+4, +2, –4, температура плавления 327,4 °С, температура кипения 1745 °С.

Металлы данной подгруппы являются сильными восстановителями.

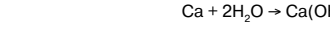
Они участвуют в реакциях с водой:

$$Ca + 2H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + H_2^-,$$

вступают в реакции с большинством неметаллов при увеличении температуры:

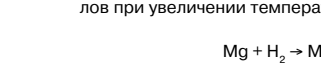


$$Mg + H_2 \rightarrow MgH_2;$$



$$3Ca + N_2 \rightarrow Ca_3N_2,$$

легко взаимодействуют с галогенами:



$$Ba + Cl_2 \rightarrow BaCl_2,$$

горят на воздухе:

$$2Ca + O_2 \rightarrow 2CaO,$$

способны восстанавливать менее активные металлы:

$$2Sr + TiO_2 \rightarrow 2SrO_2 + Ti.$$

Щелочные металлы являются сильными восстановителями.

Они **вступают в реакции с большинством неметаллов**:

$$2Na + S \rightarrow Na_2S^-$$

реакция получения сульфида натрия.

Щелочные металлы окисляются:

$$2Na + O_2 \rightarrow Na_2O_2,$$

бурно взаимодействуют с водой:

$$2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2^-,$$

поглощают углекислый газ на воздухе:

$$2NaOH + CO_2 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O.$$

Щелочные металлы растворяются в кислотах с образованием солей:

$$2KCl + 2HCl \rightarrow 2NaCl + H_2^-;$$

$$2Na + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + H_2^-.$$

29 ЭЛЕМЕНТЫ ГЛАВНОЙ ПОДГРУППЫ III ГРУППЫ

Элементы главной подгруппы третьей группы называют подгруппой алюминия.

К ней относятся алюминий Al, галлий Ga, индий In и таллий Tl.

Представители этой подгруппы являются металлами, металлические свойства которых значительно слабее металлических свойств щелочных металлов.

Для металлов данной подгруппы свойственно усиление металлических свойств с увеличением порядкового номера элемента.

В природе чаще всего из данной подгруппы встречается алюминий.

Содержание в рудах других элементов подгруппы составляет порядка тысячных долей процента.

Металлы подгруппы алюминия содержат по три электрона на внешнем энергетическом уровне, в результате чего в соединениях проявляют степень окисления +3. Исключение составляет таллий, для которого наиболее устойчивы соединения, в которых его степень окисления +1.

Алюминий обладает плотностью 2,699 г/см^3, температурой плавления 660 °С.

Галлий обладает плотностью 5,904 г/см^3, температурой плавления 29,74 °С.

Индий обладает плотностью 7,31 г/см^3, температурой плавления 156,4 °С.

30 МЕТАЛЛЫ ПОБОЧНЫХ ГРУПП

К металлам побочных подгрупп относят металлы подгруппы ванадия, подгруппы железа, подгруппы марганца, подгруппы меди, подгруппы скандия, подгруппы титана, подгруппы хрома, подгруппы цинка.

Подгруппа ванадия состоит из ванадия V, ниобия Nb, тантала Ta.

Это тугоплавкие металлы, которые стойки к химическим воздействиям. На внешнем энергетическом уровне этих металлов находится 5 электронов, поэтому проявляемая в реакциях степень окисления +5.

Подгруппа железа состоит из железа Fe, кобальта Co, никеля Ni. Данные металлы обладают большой твердостью и магнитными свойствами. С увеличением порядкового номера активность увеличивается. В химических соединениях проявляется степень окисления +2, +3.

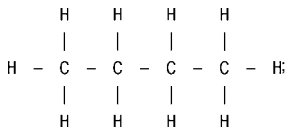
Подгруппа марганца состоит из марганца Mn, технеция Tc, рения Re. Данные металлы тугоплавкие и тяжелые. Представляют собой малоактивные металлы, которые покрываются защитной пленкой.

Подгруппа меди включает в себя медь Cu, серебро Ag, золото Au. Эти металлы носят название благородных металлов. Благородные металлы малоактивны, причем с увеличением порядкового номера способность вступать в реакции понижается. Характеризуются значительной твердостью, хорошей тепло- и электропроводностью. В соединениях имеют валентность 1, 2, 3.

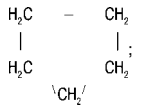
31 КЛАССИФИКАЦИЯ ОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ. ТЕОРИЯ ХИМИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ

Органические соединения можно разделить на следующие **группы**:

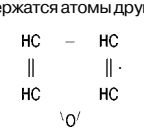
1) **ациклические**, которые также называют алифатическими и соединениями жирового ряда. Это вещества, которые содержат в себе незамкнутые цепи углеводородных атомов:



2) **гомоциклические**, или карбоциклические, соединения, которые содержат цепи, замкнуты в кольца углеродных атомов.



3) **гетероциклические соединения**, у которых в кольцах содержатся атомы других элементов:



32 СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ВАЖНЕЙШИХ ОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

Непредельные углеводороды получают следующими способами, применяя:

1) реакции, при которых число атомов молекуле не изменяется (восстановление):

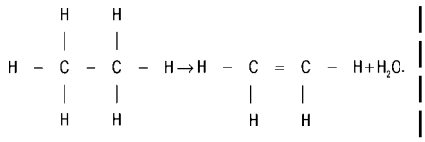
$$CH_3I + HI \rightarrow CH_4 + I_2;$$

2) реакции, в которых число атомов увеличивается (реакция Вюрца):

$$2CH_3Cl + 2Na \rightarrow CH_3 - CH_3 + 2\,NaCl;$$

3) реакции расщепления.

Олефины получают отщеплением воды от предельных спиртов:



Ацетилен получают при помощи следующей реакции:

$$CH_2Br - CH_2Br + 2KOH \rightarrow CH \equiv CH + 2KBr + 2H_2O.$$

Подгруппа скандия включает в себя скандий Sc, иттрий Y, лантан La, актиний Ac. К свойствам данных металлов относятся: серебристо-белый цвет, высокая температура плавления, ярко выраженные металлические свойства, редкость в природе.

Лантан и актиний образуют свои семейства: **лантаноиды** — f элементы, которые находятся в таблице периодических элементов под номерами от 58 до 71, близкие по свойствам, проявляют степень окисления +3; **актиноиды** расположены под номерами от 90 до 103, очень тяжелые, радиоактивные элементы.

Подгруппа титана включает в себя титан Ti, цирконий Zn, гафний Hf, курчатовий Ku. Эти металлы обладают ярко выраженными металлическими свойствами (ярче, чем у металлов основной подгруппы), тугоплавки, устойчивы к воде и воздуху. В химических реакциях проявляют степень окислении +4.

Подгруппа хрома состоит из хрома Cr, молибдена Mo, вольфрама W. Данные металлы обладают большой плотностью, тугоплавкостью (вольфрам — самый тугоплавкий металл), устойчивостью на воздухе. Максимальная степень окисления +6.

Подгруппа цинка включает в себя цинк Zn, кадмий Cd, ртуть Hg. Это переходные металлы, которые обладают слабыми восстановительными свойствами. Ртуть — единственный в природе металл, который при комнатной температуре является жидкостью.

Таллий обладает плотностью 11,85 г/см^3, температурой плавления 304 °С.

Металлы данной подгруппы вступают в реакции с кислородом:

$$4Al + 3O_3 \rightarrow 2\,Al_2O_3,$$

взаимодействуют с водой:

$$2Al + 6H_2O \rightarrow 2\,Al(OH)_3 + 3H_2\uparrow,$$

способны растворяться в щелочах:

$$2Al + 2NaOH + 2H_2O \rightarrow 2\,NaAlO_2 + 3H_2,$$

взаимодействуют с кислотами:

$$2\,Ga + 6\,H\,Cl \rightarrow 2Ga\,Cl + H_2\uparrow,$$

взаимодействуют с галогенами, а при повышении температуры и с неметаллами:

$$2Ga + 3Br \rightarrow 2GaBr_3;$$

$$2Al + 3S \rightarrow Al_2S_3.$$

Циклопарафины получают действием цинка на двугалоидопроизводные предельных углеводородов:

$$H_2C\begin{matrix}CH_2Br\\CH_2Br\end{matrix} + Zn \rightarrow ZnBr_2 + \begin{matrix}CH_2\\CH_2\end{matrix} - \begin{matrix}CH_2\\CH_2\end{matrix}.$$

Ароматические углеводороды получают синтезом ароматических солей:

$$C_2H_5\begin{matrix}O\\ONa\end{matrix} + NaOH \rightarrow C_6H_6 + Na_2CO_3.$$

Хлористый метил получают из следующей реакции:

$$CH_4 + Cl_2 \rightarrow CH_3Cl + HCl.$$

Хлорбензол получают из реакции бензола с хлором и бромом в присутствии катализатора.

$$C_6H_6 + Cl_2 \rightarrow C_6H_6Cl + HCl.$$

Спирты получают из галопроизводных:

$$C_2H_5I + HOH \leftrightarrow C_2H_5OH + HI.$$

Фенолы возможно получить при обработке дегтя щелочью или кислотой:

$$C_6H_5ONa + H_2SO_4 \rightarrow NaHSO_4 + C_6H_5OH.$$

В ациклических соединениях наблюдается углеродный скелет, который характеризует данное соединения, а гетероциклические и карбоциклические образуют цикл.

К углеродным скелетам и циклам могут присоединяться атомы других элементов (галогенов, карбоксильных).

Эти атомы влияют на химические свойства вещества и носят название функциональной группы.

Теория строения органических соединений является аналогом Периодической системы Менделеева в неорганической химии. Ее создателем является русский химик ***А. М. Бутлеров***, который изложил ее в труде «О химическом строении вещества» (1861 г.).

Теория включает в себя следующие основные положения:

1) атомы углерода способны объединяться между собой, образуя цепи;
2) порядком соединения и вводом связи определяются свойства вещества;
3) на соединения атомов затрачивается определенная энергия;
4) зная свойства вещества, можно определить строение его молекулы;
5) химические свойства каждой атомной группы значительно изменяются в зависимости от других атомов и атомных групп, присутствующих в молекуле.

33 НЕКОТОРЫЕ РЕАКЦИИ ОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

Альдегиды способны взаимодействовать с водородом:

$$CH_3-C\begin{matrix}/\,O\\ \backslash\,H\end{matrix} \rightarrow CH_3-CH_2-OH,$$

или с кислородом:

$$H-C\begin{matrix}/\,O\\ \backslash\,H\end{matrix} + Ag_2O \rightarrow H-C\begin{matrix}/\,O\\ \backslash\,OH\end{matrix}.$$

Амины являются сильными основаниями и быстро реагируют с кислотами:

$$CH_3-NH_2 + HCl \rightarrow [CH_3-NH_3]^+Cl^-.$$

Интересна и очень значима **реакция образования анилина при горении амина на воздухе**:

$$4CH_3-NH_2 + 9O_2 \rightarrow 4CO_2\uparrow + 2N_2\uparrow + 10H_2O.$$

Реакция Кучерова (полимеризация винилхлорида и воды в присутствии ртути):

$$H-C\equiv C-H + H_2O \rightarrow CH_3-C\begin{matrix}/\,O\\ \backslash\,OH\end{matrix}.$$

34 ХИМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

Аналитическая химия — наука, изучающая состав вещества, т.е. устанавливающая из каких составных частей и в какой пропорции оно состоит.

В аналитической химии различают качественный и количественный анализ.

Химические методы анализа основаны на химических свойствах веществ, на непосредственных результатах их способности принять участие в определенной специфической химической реакции.

Одной из таких характерных реакций является **бурная реакция взаимодействия оснований и кислот**:

$$NaOH + HCl \rightarrow NaCl\downarrow + H_20.$$

Поэтому если в результате воздействия на вещество кислотой происходит бурная реакция с образованием осадка, то исследуемая жидкость является основанием.

Если при взаимодействии двух веществ образовалась соль и вода, то взаимодействующими являются оксид металла и кислота:

$$Al_2O_3 + 6HCl \rightarrow 2AlCl_3 + 3H_2O.$$

35 УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Многочленом *n*-ой степени называется выражение

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — неотрицательное число;

a_0, a_1, a_2 — коэффициенты многочлена.

Два многочлена равны, если для них равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной.

Уравнением называется выражение вида

$$P(x) = 0.$$

Решением уравнений называется множество значений переменных x, превращающих уравнение в тождество.

Линейным называется уравнение вида

$$ax + b = 0.$$

Линейное уравнение имеет единственное решение, которое находится по формуле: $x = -\frac{b}{a}$.

Квадратным называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Подобные уравнения решаются с применением дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два решения, которые находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

36 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

Иррациональными называются уравнения, которые содержат выражения вида

$$\sqrt[m]{P(x)},$$

где m — целое число;

$P(x)$ — некоторый многочлен.

Если иррациональное уравнение имеет вид:

$$\sqrt[m]{P(x)} = Q(x),$$

то для решения его преобразуют в равносильное уравнение возведением обеих частей в степень m:

$$P(x) = Q^m(x)$$

с учетом ОДЗ исходного уравнения, если m — четное число, то $P(x) \geqslant 0$.

Если иррациональное уравнение имеет вид:

$$\sqrt[m]{P(x)} = \sqrt[n]{Q(x)},$$

то для приведения данного уравнения к алгебраическому необходимо возвести обе его части в степень $m \times n$:

$$P^n(x) = Q^m(x).$$

Также характерна **реакция вытеснения водорода из воды магнием**:

$$Mg + 2H2O \rightarrow Mg(OH)_2 + H_2.$$

При взаимодействии меди с кислородом воздуха она приобретает характерную зеленоватую окраску, что используется для определения меди:

$$2Cu + O_2 + H_2O \rightarrow (CuOH)_2CO_3.$$

Щелочные металлы, особенно натрий, являются сильными восстановителями, поэтому для них характерны бурные реакции с водой с образованием едкого натра, вещества с резким запахом:

$$2Na + 2H_2O \rightarrow 2\,NaOH + H_2\uparrow.$$

Наличие нитратов в веществе определяется по реакции:

$$3NaNO_3 + 8Al + 5NaOH + 2H_2O \rightarrow 3NH_3\uparrow + +8NaAlO_2.$$

Реакция Вюрца (взаимодействие металлов натрия с галогенопроизводными предельных углеводородов):

$$CH_3 - I + I\,CH_3 + 2Na \rightarrow CH_3 - CH_3 + 2NaI.$$

Реакция Зинина (получение анилина восстановлением нитробензола в присутствии чугунных стружек и соляной кислоты):

$$Fe + 2HCl \rightarrow Fe\,Cl_2 + 2H;$$

$$C_6H_5 - NO_2 + 6H \rightarrow C_6H_5 - NH_2 + 2H_20.$$

Реакция гидрирования — реакция отщепления водорода:

$$CH_3 - CH_3 \rightarrow CH_2 = CH_2 + H_2\uparrow.$$

Реакция Зеленского (пропускание ацетилена над активированным углем):

$$3H - C \equiv C - H \rightarrow \text{бензол}.$$

При этом следует учесть ОДЗ исходного уравнения, для чего все корни проверяются.

Для решения иррационального уравнения вида

$$P\left(x, \sqrt[m]{ax+b}\right) = 0,$$

где $P(x,y) = a_0x^{l_0}y^{k_0} + a_1x^{l_1}y^{k_1} + \ldots + a_nx^{l_n}y^{k_n}$, применяется подстановка $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

При решении уравнения вида

$$\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} + R(x)$$

выполняются следующие преобразования. Возведем обе части в квадрат:

$$P(x) = Q(x) + 2R(x)\sqrt{Q(x)} + R^2(x) \Rightarrow$$
$$2R(x)\sqrt{Q(x)} = P(x) - Q(x) - R^2(x).$$

Еще раз возведем в квадрат:

$$4R^2(x)Q(x) = (P(x) - Q(x) - R^2(x))^2.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет одно решение, определяемое по формуле

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Кубическим называется уравнение вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Кубические уравнения решаются приведением их к квадратному уравнению или заменой:

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

В результате получаем неполное кубическое уравнение вида

$$y^3 + py + q = 0,$$

которое решается по формулам ***Кардо***:

$$y_1 = A + B;$$
$$y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2} \times \sqrt{3},$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$, $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$;

i — мнимая единица.

37 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

Системой называется некоторое количество уравнений, имеющих одно решение.

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Множество значений $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ называется **решением системы**.

Если каждая из переменных x равна нулю, то система называется **несовместной**.

Существует несколько способов решения системы уравнений.

Одним из самых распространенных является метод последовательного исключения переменных **(метод Гаусса)**, который основан на преобразовании уравнений.

При этом используется свойство: если умножить одно из уравнений системы на любое число и прибавить его к другому уравнению системы, то полученная система будет эквивалентна первоначальной.

При этом число, на которое умножается система, выбирается так, чтобы в результате сложе-

38 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектором называется направленный отрезок, характеризующийся длинной и направлением в определенной системе координат.

Вектор задается координатами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ в определенной системе координат, т.е. в определенном базисе.

Для сложения векторов необходимо применять правило треугольника (достраивать два вектора до треугольника) или параллелограмма (достраивать до параллелограмма), или складывать их проекции на определенную ось.

Проекция вектора на ось находится по формуле

$$a_x = a \cos \alpha,$$

где a — длина вектора $\vec{a}$;

α — угол между направлением вектора $\vec{a}$ и оси x.

Произведение векторов может быть векторным или скалярным.

Скалярное произведение векторов a и b находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = a \times b \cos\beta,$$

где β — угол между направлениями векторов.

Векторное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\beta.$$

39 ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Для тригонометрических функций синуса $\sin x$, косинуса $\cos x$, тангенса $\mathrm{tg}\, x$ и котангенса $\mathrm{ctg}\, x$ выполняется целый ряд формул. Формулы приведения:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin\alpha;$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha;$$

40 ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Основные формулы тригонометрии имеют вид:

$$\mathrm{tg}\alpha \times \mathrm{ctg}\alpha = 1;$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Из этих формул следуют следующие соотношения:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

Для определения координат векторного произведения применяются формулы

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_x = a_y b_z - a_z b_y\,;$$
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_y = a_z b_x - a_x b_z\,;$$
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_z = a_x b_y - a_y b_x\,.$$

Векторное произведение может быть записано в виде определителя:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где i, j, k — орты системы прямоугольных координат.

Векторы можно записать с применением орт:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Угол между векторами определяется по формуле

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{ab}.$$

ния один из коэффициентов при x обратился в ноль, т.е. исключился. В результате первого такого шага получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a^1_{22}x_2 + \ldots + a^1_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a^1_{n2}x_2 + \ldots + a^1_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

где коэффициенты a^1 отличны от a.

Далее, повторяя подобные шаги, приходим к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a^1_{22}x_2 + a^1_{23} + \ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2, \\ a^2_{23}x_3 + \ldots + a^2_{3n}x_n = b^2_3, \\ \ldots \\ a^{n\ 1}_{nn}x_n = b^{n\ 1}_{n}. \end{cases}$$

в которой последнее уравнение будет линейным для одной переменной x_n.

Далее, определив значение x_n, определяем значение x_{n-1} из предыдущего уравнения и так далее до тех пор, пока не будут найдены все неизвестные.

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\,;$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\,;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}\,;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\,;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\mp 1}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ctg}\alpha}\,.$$

Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

$$\cos\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha\,;$$

$$\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\alpha\,;$$

$$\mathrm{ctg}\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\alpha\,;$$

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha\,;$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\,;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha\,;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha\,.$$

41 ДРУГИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

К неосновным тригонометрическим формулам относятся:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

42 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Предел функции — число а, к которому стремится последовательность значений функций $F(x)$ при x, стремящемуся к x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Существует несколько **правил нахождения пределов**.

1. Если с — постоянная величина, то

$$\lim_{x\to x_0} c = 0.$$

2. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3. Постоянный множитель выносится за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}[\alpha f(x)] = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x).$$

4. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x).$$

43 МАТРИЦЫ

Матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где m — число строк в матрице;
n — число столбцов в матрице.

Определитель матрицы det *A* — это число, равное алгебраической сумме всевозможных произведений n сомножителей, являющихся элементами матрицы.

Определитель второго порядка находится по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка находится по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

44 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

На плоскости каждая точка определяется двумя независимыми координатами $A(x;y)$.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ находится по формуле

$$\rho = |M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

При разделении отрезка M_1M_2 на два в соотношении $M_1M = \gamma MM_2$ координата точки разделения определяется по формуле

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \text{ и } y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Для определения площади треугольника, вершинами которого являются точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$, применяется формула

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Прямая на плоскости может задаваться при помощи значения углового коэффициента $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент; b — начальный отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy.

5. Предел отношения равен отношению пределов в случае, когда $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

При вычислении пределов используются так называемые замечательные пределы:
1) замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

2) замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где e = 2,17 — число Эйлера.

Функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если предел в данной точке существует, т.е. не равен ∞:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Если $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha);$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha);$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Если известны координаты точки $M_1(x_1;y_1)$ и величина углового коэффициента, то уравнение прямой будет иметь вид:

$$y - y = k(x - x_1).$$

Если известны координаты точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, через которые проходит прямая, то уравнение данной прямой будет иметь вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Общее уравнение прямой имеет вид: $A_x + B_y + C = 0$. Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямой $A_x + B_y + C = 0$ определяется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Угол между двумя прямыми определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\times\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если две прямые пересекаются в одной точке, то

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Обратная матрица A^{-1} называется обратной, если она удовлетворяет условию $AA^{-1} = E$, где

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица.

Если $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица, т.е. если для нее $\det A \neq 0$, то обратной для нее будет матрица $A_{ij}/\det A$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элементов a_{ij}. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} является исходная матрица за вычетом i-й строки и j-го столбца.

Методом матричных исчислений возможно решать систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

которая записывается в виде произведений матриц $A \times X = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$. Отсюда $X = A^{-1} \times B$.

45 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве, обладающем тремя координатами, точка записывается в виде трех координат относительно трех перпендикулярных осей: $A(x;y;z)$.

Координата вектора $\vec{c}$, начало которого обозначено точкой $A(x_1; y_1; z_1)$, а координаты конца — $B(x_2; y_2; z_2)$, находится по формуле

$$\vec{c}\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right).$$

Расстояние между точками A и B определяется по формуле

$$\rho = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

Объем тетраэдра, вершинами которого являются точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$, определяется по формуле

$$V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение **плоскости** может быть приведено в каноническом виде

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},$$

где $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right)$ — неколлинеарные векторы, параллельные плоскости;

46 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

При дифференцировании функций выполняются следующие **правила**.

1. Если c — постоянная величина, то $c' = 0$.

2. $(cu)' = cu'$.

3. Если $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции аргумента x, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. $(u \times v)' = u'v + uv'$.

5. Если $v \neq 0$, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

47 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $f(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если выполняется условие, что

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом называется выражение

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi(x) + C,$$

где C = const.

Таблица. Основные интегралы.

1. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int \sin\alpha x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C.$

48 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенный интеграл представляется выражением

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{d \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k,$$

где $\lim\limits_{d \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — интегральная сумма.

Геометрически определенный интеграл означает площадь фигуры, которая находится под графиком функции $y = f(x)$.

При вычислении определенных интегралов применяются следующие **свойства**.

1. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, если k — постоянная величина.

2. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

4. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$, если $a < c < b$.

Для вычисления интеграла используется **формула Ньютона—Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где Φ — первообразная функции $f(x)$.

Для нахождения производной сложной функции применяют следующую формулу.

Если $\varphi(f(x))$ — сложная функция, то $[\varphi(f(x))]' = \varphi'(f) \times f'(x)$.

Рассмотрим **производные элементарных функций**.

1. $(y^{\alpha})' = \alpha y^{\alpha-1}$.

2. $(a^u)' = a^u u' \ln a$.

3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

4. $(\sin u)' = -u' \cos u$.

5. $(\cos u)' = u' \sin u$.

$\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ — радиус вектор точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит плоскость;

$\lambda, \mu \in R$ — параметры.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Прямая в пространстве может быть записана в канонической форме

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — начальная точка прямой;

$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ — направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}.$$

Используя определенный интеграл, можно найти некоторые **геометрические величины**.

1. Площадь поверхности вращения, которая образовалась в результате вращения кривой $y = f(x)$, определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + f^2}\,dx.$$

2. Объем тела, полученного в результате вращения кривой $y = f(x)$, определяется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Если известна площадь сечения данного тела $Q(x)$, то

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx.$$

Для вычисления приблизительных значений интегралов применяют формулу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}),$$

где n — число прямоугольников, на которые разбита фигура;

$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — значения функции в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, которые разбивают фигуру.

5. $\int \cos \alpha x\,ds = \dfrac{1}{\alpha} \sin \alpha x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 \alpha x} = \dfrac{1}{a} \operatorname{tg} \alpha x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \alpha x} = -\dfrac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha x + C$.

8. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2 + a} = \dfrac{1}{2} \ln|x^2 + a| + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

49 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. РЯДЫ

Числовой последовательностью называется множество цифр, упорядоченных нумерацией.

Последовательности могут быть конечными $x_1, x_2, \ldots x_n$ или бесконечными.

Последовательность называется сходящейся, если она имеет предел, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a\sqrt{2}.$$

Выражение $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ называется частичной суммой данной последовательности $\{x_n\}$.

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

то **ряд** $\{x_n\}$ сходится, а S является суммой этого ряда.

Если предел $\lim_{n \to \infty} s_n$, то ряд расходится.

Ряд сходится, если выполняется хотя бы один из признаков сходимости ряда.

Признак сравнения.

Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

50 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа — упорядоченная пара действительных чисел (a, b), для которых введены определенные математические операции.

У комплексного числа $z = (a, b)$ есть действительная часть $\operatorname{Re} z = a$ и мнимая часть $\operatorname{Im} z = b$.

При сложении комплексных чисел выполняется формула

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

При умножении комплексных чисел выполняется формула

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Если действительные части двух комплексных чисел равны, а мнимые равны по величине и противоположны по знаку, то такие комплексные числа называются сопряженными.

$$\overline{z} = (a - b).$$

Комплексное число можно представить в алгебраической форме

$$z = a + ib,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

51 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей рассматривает некоторые **события**.

Событие называется **достоверным**, если оно не может не произойти.

Событие называется **невозможным**, если оно не произойдет при любом стечении обстоятельств.

Вероятностью события A называется число $P(A)$, которое определяет возможность появления данного события.

Суммой событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Вероятность суммы событий находится по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Произведением событий A и B называется событие, состоящее в одновременном появлении обоих событий.

Вероятность произведения событий определяется тем, какими являются события (независимыми или зависимыми).

Если события A и B являются независимыми, то справедлива формула

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B).$$

Если вероятность появления события A зависит от вероятности появления события B, причем $P(B/A)$ — вероятность появления события A

52 МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

При доказательстве некоторых теорем или при решении некоторых неравенств, которые содержат целочисленную переменную величину

$$n \geqslant 1,$$

часто используется метод математической индукции.

Доказательство с применением этого метода состоит из нескольких этапов:

1) производится проверка данного утверждения или неравенства, если

$$n = 1.$$

Данный шаг носит название «база индукции»;

2) предполагается, что данное утверждение справедливо, если

$$n = k;$$

3) проверяется, вытекает ли из предыдущего пункта справедливость утверждения, если

$$n = k + 1,$$

которое называется шагом индукции;

4) опираясь на предыдущий факт, делается утверждение, что предположение или неравенство справедливо при любом значении n.

Для такой записи формула умножения двух комплексных чисел примет вид

$$(a_1 + ib_1)\times(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Комплексное число может быть записано в тригонометрическом виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$.

Комплексное число может быть записано в показательной форме

$$z = |z|e^{i\varphi},$$

или если учесть, что $|z| = \rho$

$$z = \rho e^{i\Phi}.$$

Такая запись комплексного числа получается из тригонометрической формы, если применить **формулу Эйлера**

$$e^{i\Phi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Признак Даламбера.

Если $a_n > 0$ и существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

тогда если $0 \leqslant q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, сходимость не доказана и не опровергнута.

Интегральный признак Коши.

Если $f(x)$ — монотонно убывающая положительная функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Знакочередующимися называются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

Если для такого ряда сходится ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

то знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

С помощью метода математической индукции невозможно вывести новые утверждения или формулы. При помощи данного метода можно только доказать предполагаемые утверждения.

Например, можно доказать равенство

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

для любых $n \geqslant 1$.

Если $n = 1$, равенство очевидно.

Предполагаем, что равенство справедливо и при $n = k$, т.е.

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{(k+1)}{2}.$$

Составляем выражение

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1),$$

заменяем в нем первые k слагаемых на $\frac{k(k+1)}{2}$ и получаем $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Равенство доказано.

при условии, что появилось событие B, то справедлива формула

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B / A) = P(B) \times P(A / B).$$

Если происходит n независимых испытаний и двумя возможными исходами для каждого (A или не A), то вероятность того, что событие m произойдет A раз, определяется по **формуле Бернулли**:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний из n по m;

p — вероятность события A.

Если m и n принимают большие значения, то применяется **распределение Гаусса**:

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, $x = \frac{m - np}{\sigma}$.

53 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{n}).$$

Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

называется **дифференциальным уравнением первого порядка**.

Решением дифференциального уравнения является нахождение всех его решений, т.е. всех функций $y = f(x)$.

Решение уравнения $y = f(x,C)$, содержащее постоянную C, называется общим решением.

Решение дифференциального уравнения с учетом начальных условий $y(x_0) = y_0$ называется **задачей Коши**.

Если дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0,$$

то оно называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Для его решения необходимо в одну часть перенести все выражения, содержащие x, в другую часть — все содержащие y и проинтегрировать обе части.

54 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные на определенном участке функции, называются **однородными дифференциальными уравнениями второго порядка**.

У данного уравнения существует два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Если данные решения линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему решений.

Фундаментальная система решений существует, если

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

называется **линейным дифференциальным уравнением второго порядка**.

55 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Приближение функций применяется, если:

1) заданная функция слишком сложна, в этом случае ее приближенно заменяют более простой;
2) функция представлена в виде таблицы.

Нахождение приближенных функций осуществляется с помощью разложения в **ряд Тейлора** в окрестности данной точки:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots$$

Ряд прерывают на некотором члене n, который должен соответствовать данной степени точности приближения.

Часто применяется линейное приближение:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Иногда применяются уже готовые приближенные формулы при малых значениях x:

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x;$$

56 ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Вычисление определенных интегралов по **формуле Ньютона—Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Для приблизительного вычисления данных интегралов применяют квадратурные формулы (формулы трапеции, формулы прямоугольников, формула Симпсона). Для нахождения по **формуле трапеции** промежуток интегрирования разделяется на равные части:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\left[\frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh)\right],$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — шаг интегрирования;

a и b — пределы интегрирования.

Для нахождения приблизительного значения по **формуле прямоугольника** производится разбиение промежутка интегрирования на равные отрезки, и рассматривается средняя точка на каждом промежутке:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\sum_{k=1}^{n} f\left(a - \frac{h}{2} + kh\right),$$

где h — шаг интегрирования;

a и b — пределы интегрирования.

Формула Симпсона основана на квадратичной интерполяции подынтегральной функции. На каждом частичном промежутке функция при-

При решении такого вида уравнений находится решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

и частные решения при решении **задачи Коши**.

Общее решение такого уравнения $y = y(x, C_1, C_2)$ будет складываться из общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения.

Уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q — числа, которые называются **линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Характеристическим уравнением для него является уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то решение уравнения:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$F(x, y) = C,$$

где $F(x,y) = \int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y$.

Если дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

где A и B — однородные функции, то данное уравнение называется **однородным**.

Данное уравнение решается с помощью подстановки

$$y = ux \text{ или } x = uy,$$

которая приводит уравнение к виду уравнения с разделяющимися переменными.

Если дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

где левая часть является полным дифференциалом некоторой функции, то данное уравнение называется **уравнением в полных дифференциалах**.

Для его решения необходимо найти данную функцию F из уравнения

$$\mathrm{d}F = F_x'\mathrm{d}x + F_y'\mathrm{d}y.$$

ближенно заменяется квадратичной функцией. В результате площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой площадей n криволинейных трапеций. Вычисление проводится по формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\Big\{f(a) + f(b) + 2\big[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)\big]\Big\} + 4\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+3\frac{h}{2}\right) + \ldots + f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right].$$

В короткой записи формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}(S_1 + S_2) + \frac{2}{3}S_4,$$

где

$$S_1 = \frac{h}{2}\big[f(a) - f(b)\big];$$

$$S_2 = h\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh);$$

$$S_4 = h\sum_{k=1}^{n} f\left(a - \frac{h}{2} + kh\right);$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x;$$

$$e^x \approx 1 + x;$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x;$$

$$\sin x \approx x;$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2;$$

$$\operatorname{sh} x \approx x;$$

$$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2;$$

$$\operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\operatorname{arctg} x \approx x;$$

$$\arcsin x \approx x.$$