B1.
Найдите значение выражения $3\cos^2 x-2$, если $\sin^2 x=0{,}1$
Решение:
$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=0{,}9$
$3\cos^2 x-2=3\cdot 0{,}9-2=0{,}7$
Ответ: 0,7

B2
Решите уравнение:
$3^{5x-16}=81$
Решение:
$3^{5x-16}=81$
$3^{5x-16}=3^4$
$5x-16=4$
$5x=20$
$x=4$
Ответ: 4

B3.
Здание маяка высотой 24.8 м имеет форму цилиндра с диаметром основания $\frac{32}{\pi}$ м. По всей окружности здания расположены окна, высота которых 1.8 м. Планируется покрасить снаружи боковую поверхность маяка при среднем расходе краски 120 г. на 1 метр квадратный. Сколько банок, содержащих по 10 кг краски, потребуется купить для выполнения этой работы?
Решение:
Радиус основания в два раза меньше диаметра, R=$\frac{16}{\pi}$.
Длина окружности цилиндра: $l=2\pi\cdot\frac{16}{\pi}=32$
Площадь ВСЕЙ боковой поверхности цилиндра:
$S=32\cdot 24{,}8=793{,}6$
Площадь окон: $S=1{,}8\cdot 32=57.6$
Итоговая площадь под покраску: $793{,}6-57{,}6=736$
Потребуется грамм краски: $736\cdot 120=88320$
Значит, надо купить 9 банок краски по 10 кг (будет 90 кг = 90000 грамм)
Ответ: 9

B4.
Решите уравнение: $2\sqrt[8]{x+2}=\sqrt[4]{x+20}\cdot\sqrt[8]{x+2}$
Решение:
ОДЗ: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x+20\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge -2$
$2\sqrt[8]{x+2}-\sqrt[4]{x+20}\cdot\sqrt[8]{x+2}=0$,
$\sqrt[8]{x+2}\cdot\ 2-\sqrt[4]{x+20}\ \ =0$,
$\sqrt[8]{x+2}=0$ или $2-\sqrt[4]{x+20}=0$

$x=-2$ или $\sqrt[4]{x+20}=2$, $x+20=2^4$, $x=16-20$, $x=-4$ (не подходит по ОДЗ)
Сумма корней равна -2.
Ответ: -2

B6.
$$\frac{\log_2 28}{\log_2 14-1}-2\log_7 98=\frac{\log_2 28}{\log_2 14-\log_2 2}-2\log_7 98=\frac{\log_2 28}{\log_2 7}-2\log_7 98=$$
$$=\log_7 28-2\log_7 98=\log_7 28-2\ \log_7 49\cdot 2\ =\log_7 28-2\ \log_7 49\cdot 2\ =$$
$$=\log_7 28-2\ \ 2+\log_7 2\ =\log_7 28-4-\log_7 4=\log_7 7-4=1-4=-3$$
Ответ: -3

B7.
Функция $y=f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 3. Найдите значение выражения $f(-10)-2f(8)+f(-2)$, если $f(-1)=3$ и $f(1)=0,5$.
Решение:
$f(-10)=f(-10+3+3+3)=f(-1)=3$
$f(8)=f(8-3-3-3)=f(-1)=3$
$f(-2)=f(-2+3)=f(1)=0,5$
Итак, $f(-10)-2f(8)+f(-2)=3-6+0,5=-2,5$
Ответ: -2.5

B8.
Найдите все значения x, при каждом из которых выполняется соотношение
$$-4\cos\frac{3\pi x}{4}\geq 20-8x+x^2$$
Решение:
Банально берем производную от многочлена и приравниваем к нулю.
$20-8x+x^2\ \ '=-8+2x$
$-8+2x=0$, $2x=8$, $x=4$
Ответ: 4

B9.
Сколько надо добавить воды (в граммах) к 35 г. сухого картофельного пюре с содержанием 8% воды, чтобы получить пюре с содержанием 86% воды?
Решение:
В 35 г сухого пюре содержится: $35\cdot 0,08=2,8$ г. воды и $35-2,8=32,2$ г. картошки.
Пусть добавляем x грамм воды. Тогда масса нового раствора $35+x$ г. и в нем содержится уже $x+2,8$ г. воды, которая составляет 86%.
То есть, $x+2,8\ =0,86\cdot(x+35)$, $14x=2730$, $x=195$ г.
Ответ: 195

B11.
Дан ромб ABCD с острым углом B. Его сторона равна $5\sqrt{6}$, а косинус угла B равен 0,2. Высота CM, проведенная к стороне AB, пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка KM.

Решение:

$MB = BC \cdot \cos B = \sqrt{6}$. Высота СМ = 12 (по теореме Пифагора). По свойству биссектрисы

$\dfrac{KM}{CM} = \dfrac{BM}{CB} \Rightarrow KM = 2$

Ответ: 2

С1.

Найдите абсциссы всех точек графика функции $f(x) = x^3 - (\sqrt{4x+1} - 1) \cdot (\sqrt{4x+1} + 1)$, касательные в которых параллельны прямой $y = 23x + 1$

Решение:

ОДЗ: $4x + 1 \geq 0$, $x \geq -\dfrac{1}{4}$

Упростим $f(x) = x^3 - (\sqrt{4x+1} - 1) \cdot (\sqrt{4x+1} + 1) = x^3 - (4x + 1 - 1) = x^3 - 4x$.

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$y = 23x + 1 \Rightarrow k = 23$

$f'(x) = k$

Тогда:

$3x^2 - 4 = 23$

$x^2 = 9$

$x = 3$ или $x = -3$ (не подходит по ОДЗ).

Ответ: 3.

С2.

Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений $2x^2 - 3x - 2$ и $\log_{0,9}(4 - x^2)$ положительно.

Решение:

$2x^2 - 3x - 2 \;\cdot\; \log_{0,9}(4 - x^2) \;> 0$

ОДЗ: $4 - x^2 > 0$, $x \in (-2; 2)$

Найдем нули:

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

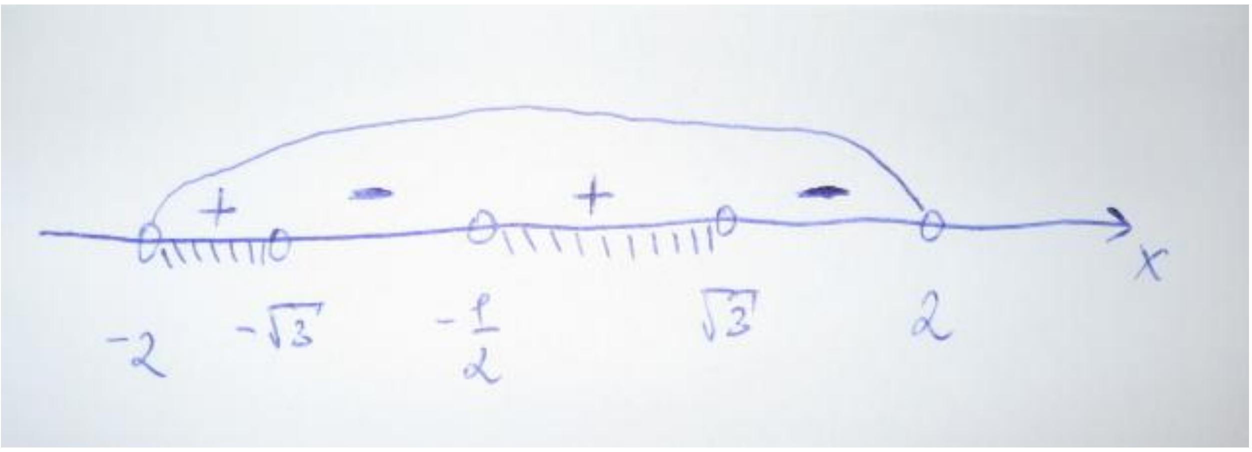
$x = 2$ или $x = -\dfrac{1}{2}$

$\log_{0,9}(4 - x^2) = 0$

$4 - x^2 = 1$

$x = \sqrt{3}$ или $x = -\sqrt{3}$

Отметим нули на числовой прямой, с учетов ОДЗ и просчитаем знаки на интервалах:



Ответ: $-2;-\sqrt{3}\ \cup\left(-\frac{1}{2};\sqrt{3}\right)$

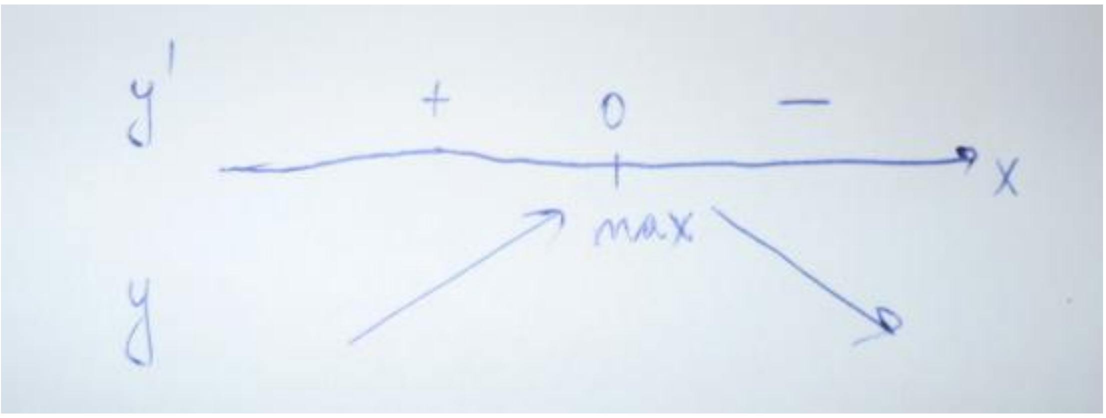
C3.

Найдите все значения а при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y=3^{a-2x^2}-8$ принадлежит промежутку $4-3^{3-a};19$.

Решение:

Найдем производную:

$y'=3^{a-2x^2}\cdot\ln 3\cdot(-4x)=(-4x\ln 3)\cdot 3^{a-2x^2}$, $y'=0$ при $x=0$.



$y_{\max}=y(0)=3^a-8$

$E(y)=(-8;3^a-8)$

Для того, чтобы хоть одно значение функции принадлежало $4-3^{3-a};19$, необходимо:

$4-3^{3-a}<3^a-8$,

$3^a+\frac{27}{3^a}-12>0\,|\cdot 3^a>0$,

$3^{2a}-12\cdot 3^a+27>0$,

$\left[\begin{array}{l}3^a>9\\3^a<3\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}a>2\\a<1\end{array}\right.$

Ответ: $-\infty;1\ \cup\ 2;+\infty$

C5.

Решите уравнение $x^{12}-\ 12+8x\ ^{6}=32\sin\left|12+8x\right|-32\sin\ x^{2}\ $.

Решение:

$f(x^2)=f(12+8x)$, где $f(x)=t^6+32\sin(t)$.

Функция четная, $f(x)=f(-x)$. При $t>0$, $f\,'(t)=6t^5+32\cos t$. При $t=0$, $f(t)=0$.

При $t>\dfrac{\pi}{2}$, $6t^5>6\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^5>6\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{3^6}{16}>45>32\cos t$

$f(t)$ - четная, возрастающая при $t>0$. Если $f(t_1)=f(t_2)$, то $t_1=t_2$ или $t_1=-t_2$.

$x^2=12+8x$ или $x^2=-\ 12+8x$

$x=4\pm2\sqrt{7}$ или $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Ответ: $4\pm2\sqrt{7}$, -2, -6