C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\cos x=0, \\ (5\sqrt{\cos x}-1)(5y+6)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=-\dfrac{6}{5}, \\ \cos x\ge 0 \end{cases}$ или $\cos x=\dfrac{1}{25}$.

Если $y=-\dfrac{6}{5}$, то из первого уравнения $\cos x=\dfrac{6}{5}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\cos x=\dfrac{1}{25}$, то $x=\pm\arccos\dfrac{1}{25}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем $y=-\dfrac{1}{25}$.

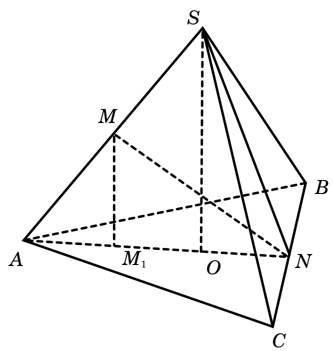
Ответ: $\left(\pm\arccos\dfrac{1}{25}+2\pi n;\ -\dfrac{1}{25}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB=20\sqrt{3}$, $SC=29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.

Пусть M и N – середины ребер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 – искомый.



$MM_1 \parallel SO$, где O – центр основания, значит, MM_1 – средняя линия треугольника ASO, а поэтому M_1 – середина AO. Тогда $AM_1=\dfrac{1}{3}AN=10$ и $M_1N=\dfrac{2}{3}AN=20$.

Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

$$MM_1=\sqrt{AM^2-AM_1^2}=\sqrt{\frac{841}{4}-100}=\frac{21}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNM_1=\frac{MM_1}{M_1N}=\frac{21}{40}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{21}{40}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{21}{40}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\log_2\left((7^{-x^2}-5)(7^{-x^2+16}-1)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>\log_2(7^{3-x^2}-3)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-5)(7^{16}t-1)\right)+\log_2\frac{t-5}{7^{16}t-1}>\log_2(343t-3)^2.$$

$t-5<0$, поэтому $7^{16}t-1<0$, то есть $0<t<\dfrac{1}{7^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases} \log_2(t-5)^2>\log_2(343t-3)^2, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-5|>|343t-3|, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-t>3-343t, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}$.

Тогда $7^{-x^2}<7^{-16} \Leftrightarrow x^2>16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В треугольнике ABC $AB=13$, $BC=9$, $CA=11$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Возможны два случая:

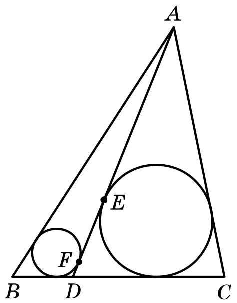


Рис. 1

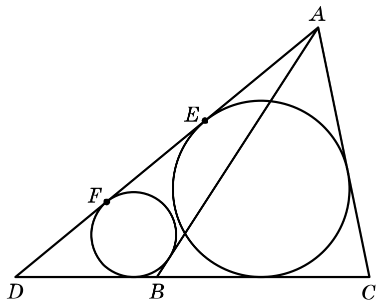


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=\frac{9}{10}$, $y=\frac{81}{10}$, $DE=\frac{d+y-11}{2}$, $DF=\frac{d+x-13}{2}$. Значит, $EF=\frac{2+y-x}{2}=\frac{23}{5}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=\frac{9}{8}$, $y=x+9=\frac{81}{8}$, $DE=\frac{d+y-11}{2}$, $DF=\frac{d+x-13}{2}$. Значит, $EF=\frac{11}{2}$.

Ответ: $\frac{11}{2}$ или $\frac{23}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4|x-a^2|-6x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a^2$: $f(x)=x^2-10x+4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x\le a^2$: $f(x)=x^2-2x-4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

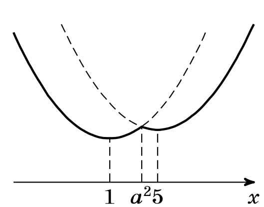


Рис. 1

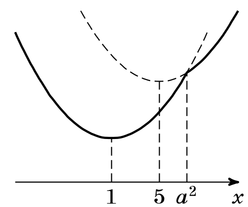


Рис. 2

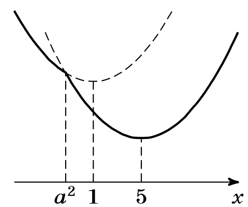


Рис. 3

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1): $1<a^2<5 \Leftrightarrow 1<|a|<\sqrt{5}$.

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-1;\ 1<a<\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Перед каждым из чисел 11, 12, …, 19 и 4, 5, …, 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго – с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(11+\ldots+19)-9(-4-\ldots-8)=5\left(\frac{11+19}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 21=945.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-11-12+13-14+15-16+17-18+19)-9(-4+5-6-7+8)=$$
$$=-5\cdot 7+9\cdot 4=-35+36=1.$$

Ответ: 1 и 945.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0