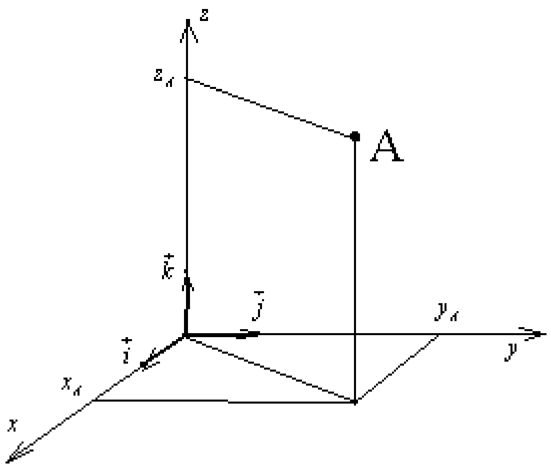
Шведова И.Г.,
учитель математики лицея №1580

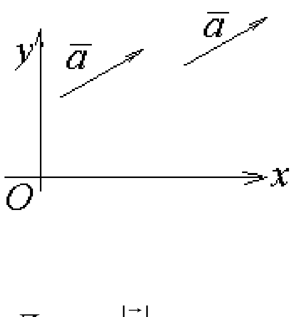
Векторные методы решения задач по стереометрии

Применение векторной алгебры в школьном курсе геометрии в настоящее время в большинстве случаев ограничивается решением задач чисто векторного содержания. Речь идет о задачах типа « найти площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;2)$ »[1] и подобных. В стереометрии векторные методы иногда используют для нахождения различного вида углов в прямоугольном параллелепипеде. И, что интересно, теоретический материал по данной тематике в учебниках излагается довольно подробно, вплоть до способов вычисления координат векторного произведения векторов, его главных свойств и основ аналитической геометрии. Таким образом, по существу, невостребованным остается пласт знаний, достойный широкого применения в решении ряда сложных стереометрических задач. Целью настоящей заметки является показать читателю, насколько выигрышным может быть использование векторных приемов на практике. Начнем с краткого описания основного «инструментария».



Азбука векторов

Координаты точки $A(x_A; y_A; z_A)$ в декартовой (прямоугольной) системе координат O*xyz* представляют собой проекции точки на координатные оси.

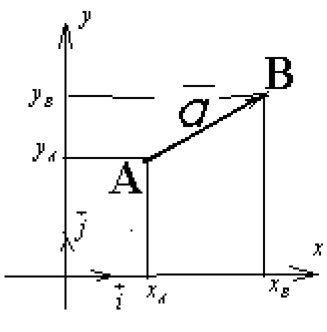


Векторы однозначно определяются своими координатами

$a_x = x_B - x_A; a_y = y_B - y_A; a_z = z_B - z_A$ $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$,

то есть являются свободными .

Длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

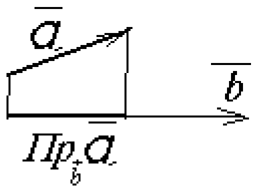


[1] Геометрия. 11 кл. Е.В.Потоскуев, Л.И.Звавич.

Скалярное произведение векторов есть число $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Угол между векторами вычисляется по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Проекция вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ вычисляется в соответствии с рисунком по формуле $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

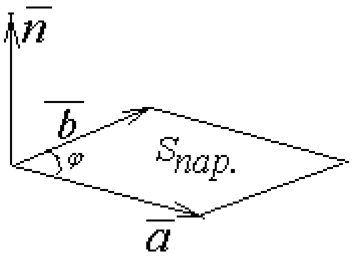


Векторное произведение векторов $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ есть вектор, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{n}\perp\vec{a};\ \vec{n}\perp\vec{b}$,

2) $|\vec{n}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=S_{\text{ï àð.}}$

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{n}$ образуют правую тройку векторов.



Для решения задач используются свойства 1) и 2).

Координаты векторного произведения удобно вычислять через определитель.

Если $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\cdot\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\cdot\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\cdot\vec{k}.$$

для вычисления определителя удобно использовать вынесение общего множителя строки или столбца за знак определителя.

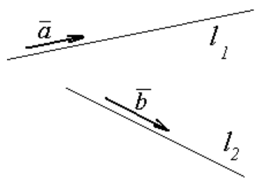
$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ka_x & ka_y & ka_z\\ mb_x & mb_y & mb_z\end{vmatrix}=k\cdot m\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

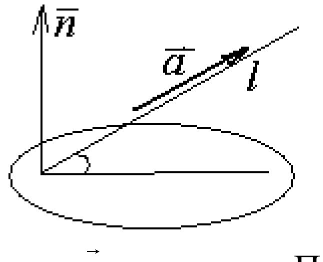
<u>Теоретические задачи</u>

1. Нахождение углов

а) *Между прямыми.*

Прямая в пространстве однозначно задается точкой и направляющим вектором (вектором параллельным прямой). Угол между прямыми вычисляется как острый угол между направляющими векторами прямых.



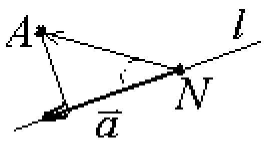


б) *Угол между прямой и плоскостью* определяется как угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Для нахождения этого угла используется угол между направляющим $\vec{a}$ вектором прямой и нормальным (перпендикулярным) вектором $\vec{n}$ плоскости. При этом угла φ между прямой и плоскостью определяется по формуле: $\sin\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$

в) *Угол φ между плоскостями* вычисляется как острый угол между нормальными векторами $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ этих плоскостей по формуле $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$.

2. Нахождение расстояний

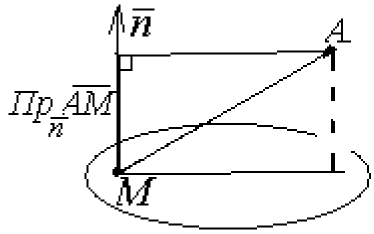
а) *Расстояние $\rho(A,\ell)$ точки А до прямой ℓ* в пространстве вычисляется по формуле $\rho(A,\ell) = |\overrightarrow{AN}|\cdot\sin\varphi$.



Здесь N- произвольная точка на прямой, φ-угол между векторами $\overrightarrow{AN}$ и направляющим вектором $\vec{a}$ прямой ℓ.

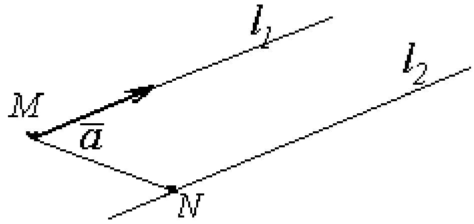
б) *Расстояние $\rho(A,\alpha)$ от точки А до плоскости α* вычисляется по формуле

$\rho(A,\alpha) = |Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{AM}| = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}|}{|\vec{n}|}$. Здесь М- произвольная точка плоскости, $\vec{n}$- нормальный вектор плоскости.

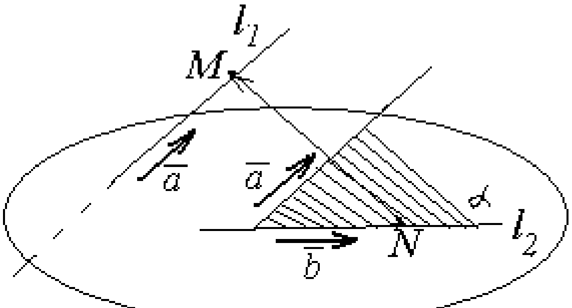


По этой же формуле вычисляется *расстояние от прямой ℓ до плоскости α*, которой прямая ℓ параллельна. При этом А- произвольная точка прямой ℓ, М- произвольная точка плоскости α.

в) *Расстояние $\rho(\ell_1,\ell_2)$ между параллельными прямыми* ℓ_1,ℓ_2 вычисляется по формуле $\rho(\ell_1,\ell_2) = |\overrightarrow{MN}|\cdot\sin\varphi$. Здесь M, N – соответственно произвольные точки на прямых ℓ_1,ℓ_2, а φ - угол между вектором $\overrightarrow{MN}$ и общим направляющим вектором $\vec{a}$ этих прямых.



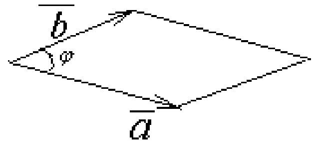
г) *Расстояние $\rho(\ell_1,\ell_2)$ между скрещивающимися прямыми* ℓ_1,ℓ_2, которые задаются в пространстве соответственно: ℓ_1 - точкой М и направляющим вектором $\vec{a}$; ℓ_2 - точкой N и направляющим вектором $\vec{b}$.



$\rho(\ell_1,\ell_2)$ вычисляется по формуле $\rho(\ell_1,\ell_2) = |Пр_{\vec{a}\times\vec{b}}\overrightarrow{MN}|$. Происхождение этой формулы объясняется следующим образом. Расстояние между скрещивающимися прямыми – суть расстояние от одной из них ℓ_1 до плоскости α, проходящей через другую прямую ℓ_2 параллельно первой прямой ℓ_1 . При этом вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ является нормальным для плоскости α .

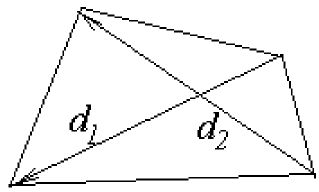
3. Вычисление площадей

а) *Площадь S параллелограмма,* построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ вычисляется по формуле: $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

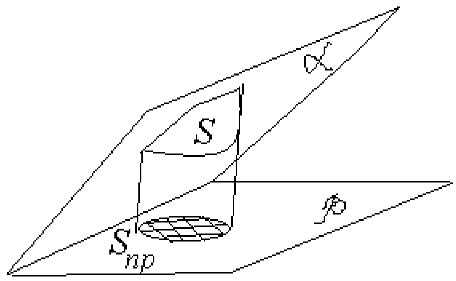


б) *Площадь треугольника,* построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

в) *Площадь произвольного выпуклого плоского* четырехугольника с диагоналями $\vec{d_1},\vec{d_2}$ вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}\left|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right|$.



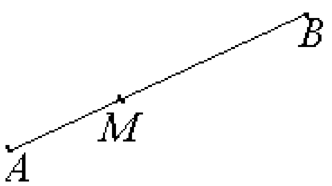
г) *Площадь* $S_{пр}$ *проекции на плоскость* β *произвольной фигуры,* лежащей в плоскости α и имеющей площадь S, вычисляется по



формуле $S_{пр}=S\cdot\cos\varphi$. Здесь φ -угол между плоскостями α,β .

Формула деления отрезка в данном отношении.

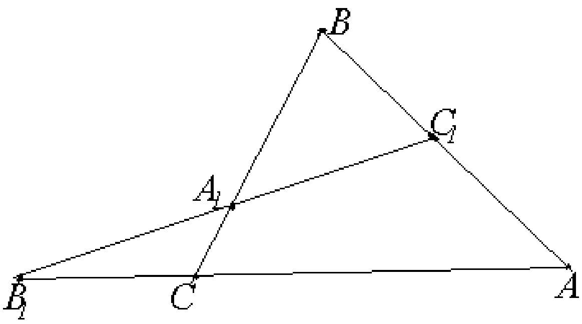
Пусть точка М делит отрезок АМ в отношении λ .



$\frac{|AM|}{|MB|}=\lambda$. Тогда $x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$; $y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$; $z_M=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$.

Теорема Менелая

В любом треугольнике АВС имеет место равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.



Рассмотрим решения нескольких задач из разряда «олимпиадных», в основу которых положены сведения, приведенные выше.

1. В правильной треугольной пирамиде SABC со стороной a и боковым ребром $a\sqrt{3}$ плоскость α проходит через высоту основания. Вычислите площадь наименьшего сечения пирамиды этой плоскостью.

Решение.

Сечение пирамиды плоскостью α представляет собой треугольник DCK, вершина K которого лежит на ребре AS. Наименьшее значение площади этого треугольника соответствует случаю, когда его высота, опущенная из точки K, является расстоянием между скрещивающимися прямыми DC и AS, то есть равно $\rho(AS, DC)$. Введем систему координат с центром в точке D,

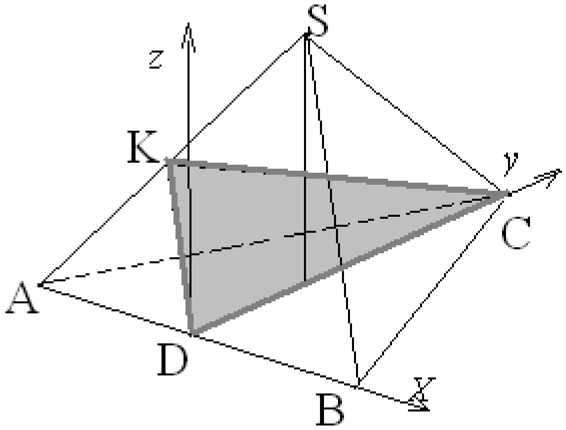


Рис.

$A(-\frac{a}{2};0;0)$, $B(\frac{a}{2};0;0)$, $C(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $S(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{6};2\ a\sqrt{\frac{2}{3}})$.

$S_{\min} = \frac{1}{2} DC \cdot \rho(AS, DC)$. $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left| Пр_{\vec{n}} \overrightarrow{AD} \right|$. Здесь $\overrightarrow{AD} = (\frac{a}{2};0;0)$

$$\vec{n} \sim (\vec{j} \times \overrightarrow{AS}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3a & a\sqrt{3} & 4a\sqrt{6} \end{vmatrix} = (4a\sqrt{6};0;-3a) \sim (4\sqrt{2};0;-\sqrt{3}),$$

Здесь значок «~» использован для обозначения коллинеарности векторов, то есть $\vec{n} \sim (\vec{j} \times \overrightarrow{AS}) \Leftrightarrow \vec{n} = k \cdot (\vec{j} \times \overrightarrow{AS}),\ k \in R.$

$\vec{n} = (4\sqrt{2};0;-\sqrt{3})$. $S_{\min} = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{35}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2\sqrt{35}}$. **Ответ:** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2\sqrt{35}}$.

2. Найдите площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды TABCD плоскостью, параллельной апофеме TL боковой грани TBC и медиане AM боковой грани TAB и проходящей через середину бокового ребра TC, если сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости равно 40/21.

Решение.

Построим сечение пирамиды плоскостью α :

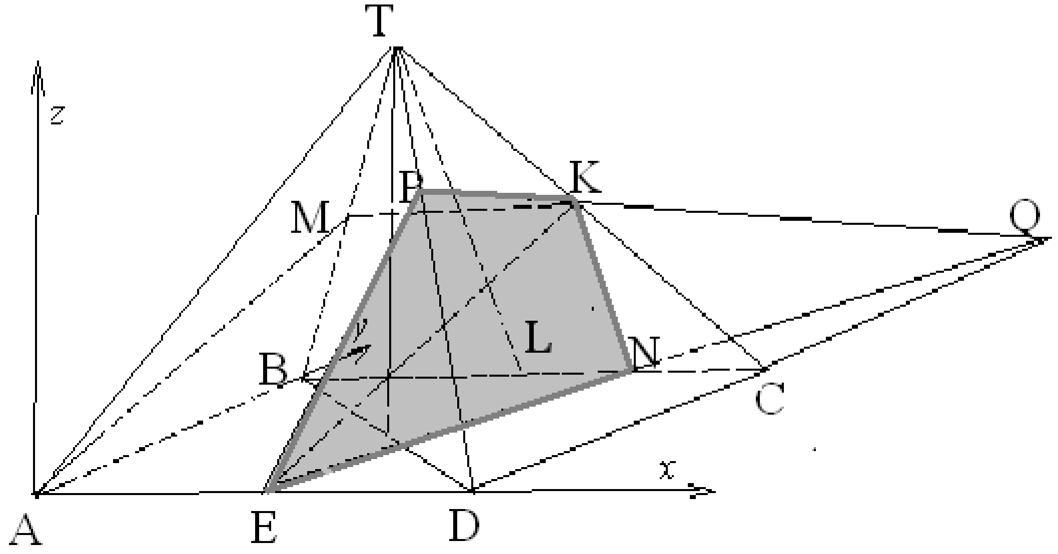


Рис.

$пл.AMK: \quad KE \parallel AM, KE = AM \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AD, \; пл.BTC: \quad KN \parallel TL, KN = \frac{1}{2}TL,$

$пл.ABC: \quad EN \cap DC = Q \in пл.DTC \Rightarrow \alpha \cap DTC = QP, \quad EPKN -$ искомое сечение.

Запишем координаты точек: $A(0;0;0), T(4;4;h), C(8;8;0), E(4;0;0), D(8;0;0),$ $N(6;8;0), K(6;6;\frac{h}{2})$. Для расчета координат точки P применим теорему Менелая для треугольника DTC: $\frac{DP}{PT} \cdot \frac{TK}{KC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PT} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PT} = 2$. Используя формулы деления отрезка в данном отношении, получим: $x_P = \frac{x_D + 2x_T}{1+2} = \frac{16}{3}, \; y_P = \frac{y_D + 2y_T}{3} = \frac{8}{3}, \; z_P = \frac{2}{3}h. \Rightarrow P(\frac{16}{3}; \frac{8}{3}; \frac{2h}{3})$. Запишем формулу для площади сечения:

$$S_{сеч.} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{EK} \times \overrightarrow{PN}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & \frac{h}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{2h}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 12 & h \\ 1 & 8 & -h \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|(-20h; 5h; 20)\right|.$$

$S_{сеч.} = \frac{5}{6}\left|(-4h; h; 4)\right| = \frac{5}{6}\sqrt{17h^2 + 16}$. Для нахождения h используем условие: $\rho(T, \alpha) = \frac{40}{21}$. В то же время $\rho(T, \alpha)$ можно представить в виде

$\rho(T,\alpha)=\left|Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{TE}\right|,\quad \vec{n}=(-4h;h;4),\quad \overrightarrow{TE}=(0;4;h)\Rightarrow \frac{40}{21}=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{TE}\right|}{\left|\vec{n}\right|}\Rightarrow \frac{h}{\sqrt{17h^2+16}}=\frac{5}{21}$. Отсюда $h^2=25\Rightarrow S_{сеч.}=\frac{5}{6}\sqrt{25\cdot 17+16}=\frac{35}{2}$.

Ответ: $S_{сеч.}=17,5$

3. В кубе $ABCBA_1B_1C_1D_1$ со стороной a точка K является серединой стороны верхнего основания B_1C_1, точка L делит другую сторону C_1D_1 этого основания в отношении 2:1, считая от вершины C_1, точка N является серединой бокового ребра AA_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки K, L, N.

Решение:

Построим сечение куба через точки K, L, N.

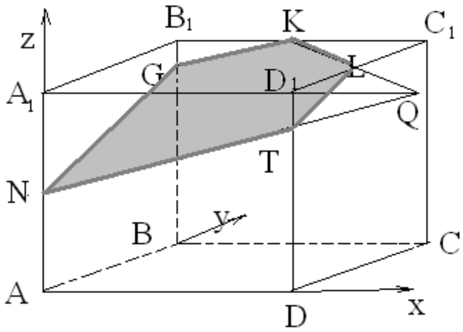


Рис.

$пл.A_1B_1C_1: KL\cap A_1D_1=Q,\ пл.AA_1D_1: NQ\cap DD_1=T$ $пл.BB_1C: KG\,||\,TN,\ NTLKG$ - искомое сечение. Площадь сечения вычислим, используя формулу $S_{пр}=S\cdot\cos\varphi$, где φ - угол между нормальными векторами плоскости основания куба и плоскости сечения. Площадь проекции сечения куба на плоскость ABC можно вычислить как $S_{ABCD}-S_{\triangle KLC_1}=\ a^2-\frac{1}{2}KC_1\cdot C_1L=a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a^2=\frac{5}{6}a^2$. В декартовой системе координат с центром в вершине куба A координаты вершин имеют вид: $K(\frac{a}{2};a;a),L(a;\frac{a}{3};a),N(0;0;\frac{a}{2})$. Отсюда $\overrightarrow{NK}=(\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}),\overrightarrow{NL}=(a;\frac{a}{3};\frac{a}{2})$. Нормальный вектор $\vec{n}$ сечения можно принять пропорциональным (коллинеарным) векторному произведению $\overrightarrow{NL}\times\overrightarrow{NK}$.

$\vec{n}\sim\overrightarrow{NL}\times\overrightarrow{NK}\sim\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-4;-3;10)$. Нормальный вектор плоскости основания $\vec{k}=(0;0;1)$. Тогда $\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{k}\right|}=\frac{10}{5\sqrt{5}}$ и $S=\frac{S_{пр}}{cos\varphi}=\frac{5}{6}a^2\cdot\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}a^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}a^2$.

4. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным 90°, и углом C, равным 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середину бокового ребра CC_1, и вершину B и параллельной диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, если расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 1/3, а гипотенуза основания призмы равна 4.

Решение.

В соответствии с условием задачи AB=2, BC=$2\sqrt{3}$. Построим сечение:

пл. ACC_1: $KL \parallel AC_1$, $KL \cap AA_1 = Q$, ($AQ=\frac{1}{3}A_1Q$),

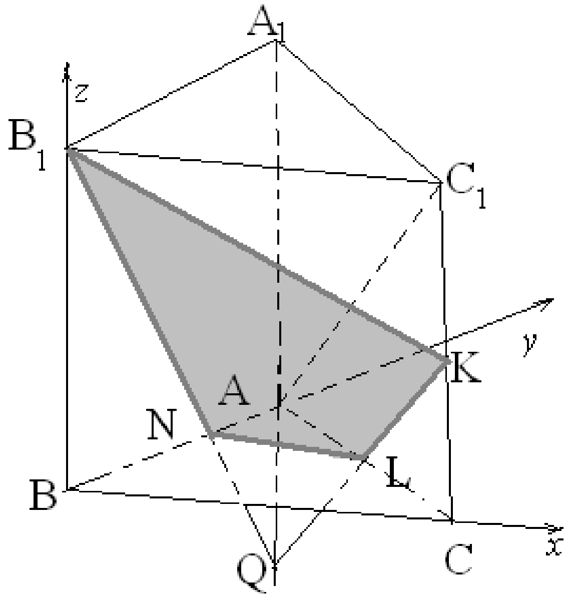


Рис.

пл. ABB_1: $QB_1 \cap AB = N$, ($AN=\frac{1}{3}AB$).

$KLNB_1$ - искомое сечение . Введем систему координат: B(0;0;0). A(0;2;0), C($2\sqrt{3}$;0;0), B_1 (0;0;h), A_1(0;2;h), C_1 ($2\sqrt{3}$;0;h), L($\sqrt{3}$;1;0), K($2\sqrt{3}$;0;$\frac{1}{2}$h), N(0;$\frac{4}{3}$;0). Площадь сечения

$$S_{KLNB_1} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B_1L} \times \overrightarrow{NK}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & 1 & -h \\ 2\sqrt{3} & -\frac{4}{3} & \frac{h}{2} \end{matrix}\right\|$$

$$S_{KLNB_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & 1 & -h \\ 12\sqrt{3} & -8 & 3h \end{matrix}\right\|$$

$=\frac{1}{12}\left|(-5h;-15h;-20\sqrt{3})\right| = \frac{5}{12}\left|(h;3\sqrt{3}h;4\sqrt{3})\right| = \frac{5}{12}\sqrt{28h^2+48}.$ Чтобы найти h, используем условие задачи: $\rho(AC_1,\alpha)=\frac{1}{3}$. С другой стороны, $\rho(AC_1,\alpha)=\left|Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{AN}\right|$, здесь $\vec{n}=(h;3\sqrt{3}h;4\sqrt{3})$. Точки A и N , ($A \in AC_1,\ N \in \alpha$), выбраны, как наиболее удобные по координатной записи.

$$\overrightarrow{AN}=(0;-\frac{2}{3};0), \quad \rho(AC_1,\alpha)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sqrt{3}h}{\sqrt{28h^2+48}}=\frac{1}{3} \Rightarrow h^2=\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$S=\frac{5}{12}\sqrt{\frac{28\cdot 3}{5}+48}=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

В заключение, отметим, что в основе всех рассмотренных выше решений лежит один незатейливый алгоритм, основанный на сводке приведенных выше формул. Использование его в условиях конкурсного состязания, когда дефицит времени и эмоциональное напряжение конкурсанта, образно говоря, «тормозят» поиск индивидуальных геометрических (для каждой задачи своих) решений, по мнению авторов, дает выгодные преимущества участнику.