Среда, 15 июля 2009 г.

Задача 1. Даны целое положительное число n и попарно различные целые числа $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) из множества $\{1, \ldots, n\}$ такие, что для каждого $i = 1, \ldots, k-1$ число $a_i(a_{i+1}-1)$ делится на n. Докажите, что число $a_k(a_1 - 1)$ не делится на n.

Задача 2. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q — внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M — середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ — окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что $OP = OQ$.

Задача 3. Дана строго возрастающая последовательность целых положительных чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots$ такая, что каждая из двух последовательностей

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{и} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

является арифметической прогрессией. Докажите, что последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ также является арифметической прогрессией.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов

Четверг, 16 июля 2009 г.

Задача 4. Треугольник ABC таков, что $AB = AC$. Биссектрисы углов CAB и ABC пересекают стороны BC и CA в точках D и E соответственно. Обозначим через K центр окружности, вписанной в треугольник ADC. Оказалось, что $\angle BEK = 45^\circ$. Найдите все возможные значения угла CAB.

Задача 5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (то есть функции, определенные на множестве всех целых положительных чисел и принимающие целые положительные значения) такие, что для любых целых положительных a и b существует невырожденный треугольник, длины сторон которого равны трем числам

$$a,\ f(b)\ \text{ и }\ f(b + f(a) - 1).$$

(Треугольник называется *невырожденным*, если его вершины не лежат на одной прямой.)

Задача 6. Даны попарно различные целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также множество M, состоящее из $n-1$ целого положительного числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не приземлился в точке, имеющей координату из множества M.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов