С1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \dfrac{1}{2}$, тогда либо $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

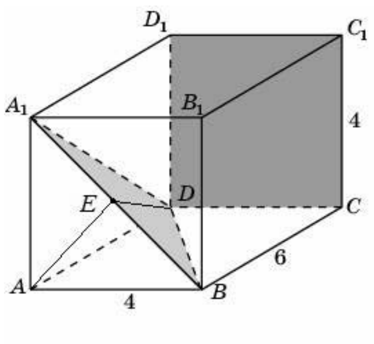
либо $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.



Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:

$$\operatorname{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \ge 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \ne 0, \\ 5 - x \ge 0, \\ 5 - x \ne 1 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \le 5, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \ne 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2$,

получим: $x + \dfrac{3}{x} \ge 4$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x} \ge 0$. Решим это неравенство:

$0 < x \le 1,\ \ x \ge 3.$

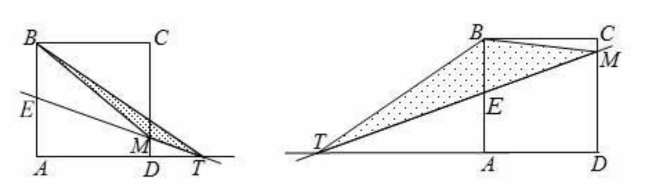
С учетом ограничений получаем: $0 < x \le 1,\ x = 2,\ 3 \le x < 4,\ 4 < x \le 5$.

Ответ: $0 < x \le 1,\ x = 2,\ 3 \le x < 4,\ 4 < x \le 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\mathrm{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \mathrm{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$

2) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \mathrm{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

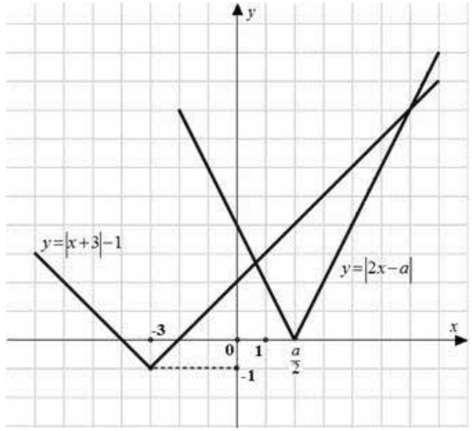
$$|2x - a| + 1 \le |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x - a| \le |x + 3| - 1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x - a| \le -x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ 2x - a \le -x - 4, \\ 2x - a \ge x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ x \le \frac{a-4}{3}, \\ x \ge a + 4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a + 4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x - a| \le x + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ 2x - a \le x + 2, \\ 2x - a \ge -x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a + 2, \\ x \ge \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\frac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21; \end{cases} \begin{cases} 6\le x\le 12, \\ 12\le x\le 20; \end{cases} x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2\le y+10\le 2, \\ -2\le y+6\le 2, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y=-\cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ находим: $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ или $\sin x=-1$.

1) Пусть $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, тогда либо $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=-\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$,

либо $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=-\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x=-1$, тогда $y=-\cos x=0$ — не дает решения.

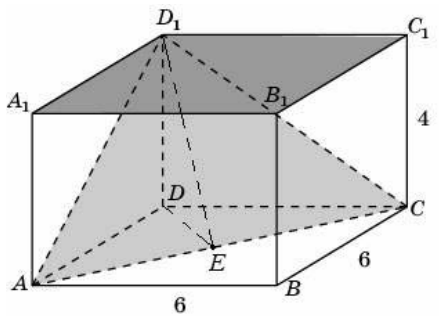
Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E – середина AC. $D_1E\perp AC$, $DE\perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:



$$\operatorname{tg}\angle DED_1=\frac{DD_1}{DE}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\geq 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x\neq 0, \\ 6-x\geq 0 \\ 6-x\neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x\leq 6, \\ x\neq 0, \\ x\neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-8x+16}=1$, т.е. $|x-4|=1$ и, значит, $x=3$ или $x=5$.

Значит, $x=3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-8x+16}\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\dfrac{4}{x}\geq 5$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}\geq 0$. Решим это неравенство:

$0<x\leq 1,\quad x\geq 4$.

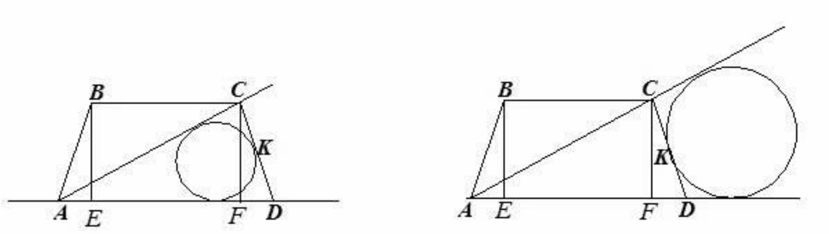
С учетом ограничений получаем: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4\leq x<5,\ 5<x\leq 6$.

Ответ: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4\leq x<5,\ 5<x\leq 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Дана трапеция *ABCD*, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение.



Найдем диагональ AC. Опустим из вершин *B* и *C* на сторону *AD* перпендикуляры *BE* и *CF* соответственно. *AE* = *FD*, так как трапеция равнобедренная. *BCFE* – прямоугольник.

$AE = \dfrac{100-44}{2} = 28$, $BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$,

$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75$.

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник *ACD*.

$CK = \dfrac{AC + CD - AD}{2} = \dfrac{75 + 35 - 100}{2} = 5$.

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон *AC* и *AD* за точками *C* и *D* соответственно и отрезка *CD*.

$CK = \dfrac{AD + CD - AC}{2} = \dfrac{100 + 35 - 75}{2} = 30$.

Ответ: 5 или 30.

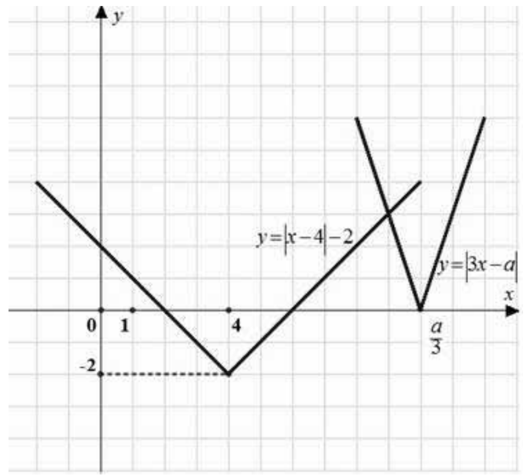
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \le |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x - a| \le |x - 4| - 2$.

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\dfrac{a}{3} \le 2$ или $\dfrac{a}{3} \ge 6$.

1) $\begin{cases} a \le 6 \\ |3x-a| \le -x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ 3x-a \le -x+2, \\ 3x-a \ge x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ x \le \dfrac{a+2}{4}, \\ x \ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a+2}{4} - \dfrac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

2) $\begin{cases} a \ge 18, \\ |3x-a| \le x-6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ 3x-a \le x-6, \\ 3x-a \ge -x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ x \le \dfrac{a-6}{2}, \\ x \ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-6}{2} - \dfrac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2,\ a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \dfrac{3}{2} = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:
$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7;\ 7)$, $(-6;\ 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \dfrac{1}{2}$, тогда либо $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

либо $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

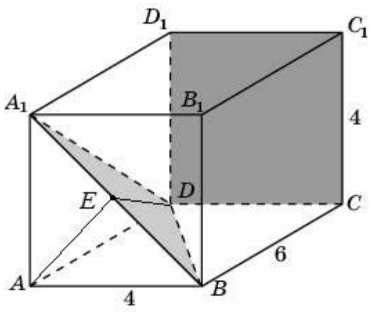
Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\operatorname{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x \geq 0, \\ 5 - x \neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.
Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2$,

получим: $x + \dfrac{3}{x} \geq 4$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$0 < x \leq 1$, $x \geq 3$.

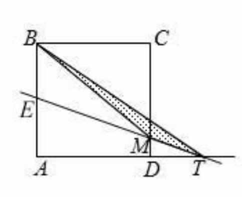
С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1$, $x = 2$, $3 \leq x < 4$, $4 < x \leq 5$.

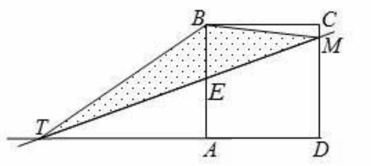
Ответ: $0 < x \leq 1$, $x = 2$, $3 \leq x < 4$, $4 < x \leq 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.





Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT - \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \operatorname{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 - 4) = 2.$

2) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT + \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \operatorname{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

$$|2x-a|+1 \le |x+3|$$

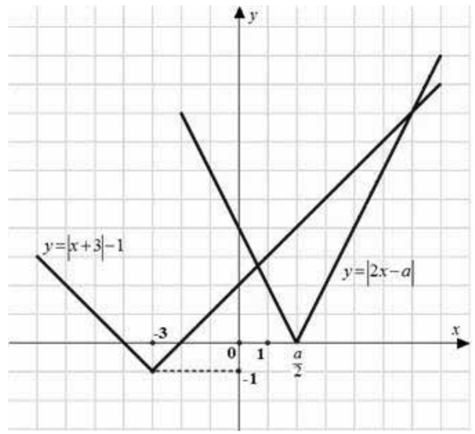
образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу:

$|2x-a| \le |x+3| - 1.$

Построим схематично графики функций $y = |2x-a|$ и $y = |x+3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x-a| \le -x-4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ 2x-a \le -x-4, \\ 2x-a \ge x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ x \le \frac{a-4}{3}, \\ x \ge a+4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a+4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x-a| \le x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ 2x-a \le x+2, \\ 2x-a \ge -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a+2, \\ x \ge \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\frac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21; \end{cases} \begin{cases} 6\le x\le 12, \\ 12\le x\le 20; \end{cases} x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2\le y+10\le 2, \\ -2\le y+6\le 2, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4, \\ y\in\mathbb{Z}; \end{cases} y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0,\\ y=-\cos x.\end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ находим: $\sin x=-\frac{1}{2}$ или $\sin x=-1$.

1) Пусть $\sin x=-\frac{1}{2}$, тогда либо $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=-\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$,

либо $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x=-1$, тогда $y=-\cos x=0$ — не дает решения.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

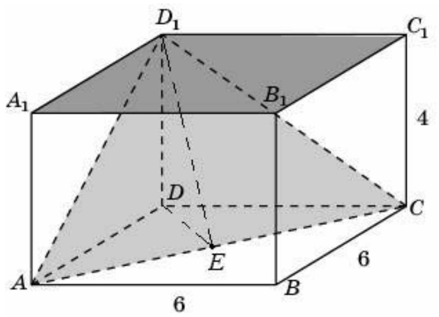
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=6$, $BC=6$, $CC_1=4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E – середина AC. $D_1E\perp AC$, $DE\perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла.

Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:



$$\operatorname{tg}\angle DED_1=\frac{DD_1}{DE}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\ge 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases}x\ne 0,\\ 6-x\ge 0\\ 6-x\ne 1\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x\le 6,\\ x\ne 0,\\ x\ne 5.\end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-8x+16}=1$, т.е. $|x-4|=1$ и, значит, $x=3$ или $x=5$.

Значит, $x=3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-8x+16}\ne 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\frac{4}{x}\ge 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x}\ge 0$. Решим это неравенство:

$0<x\le 1,\ \ x\ge 4$.

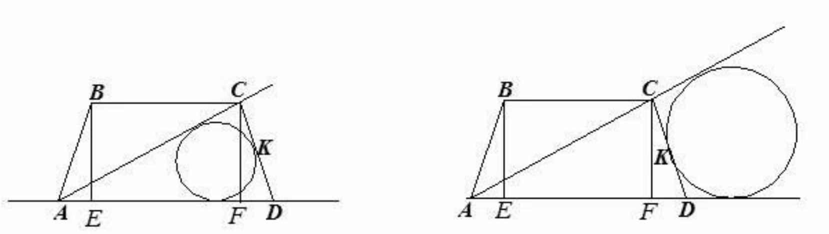
С учетом ограничений получаем: $0<x\le 1,\ x=3,\ 4\le x<5,\ 5<x\le 6$.

Ответ: $0<x\le 1,\ x=3,\ 4\le x<5,\ 5<x\le 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Дана трапеция *ABCD*, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение.



Найдем диагональ AC. Опустим из вершин *B* и *C* на сторону *AD* перпендикуляры *BE* и *CF* соответственно. *AE* = *FD*, так как трапеция равнобедренная. *BCFE* – прямоугольник.

$AE = \dfrac{100-44}{2} = 28$, $BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$,

$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75$.

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник *ACD*.

$CK = \dfrac{AC + CD - AD}{2} = \dfrac{75 + 35 - 100}{2} = 5$.

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон *AC* и *AD* за точками *C* и *D* соответственно и отрезка *CD*.

$CK = \dfrac{AD + CD - AC}{2} = \dfrac{100 + 35 - 75}{2} = 30$.

Ответ: 5 или 30.

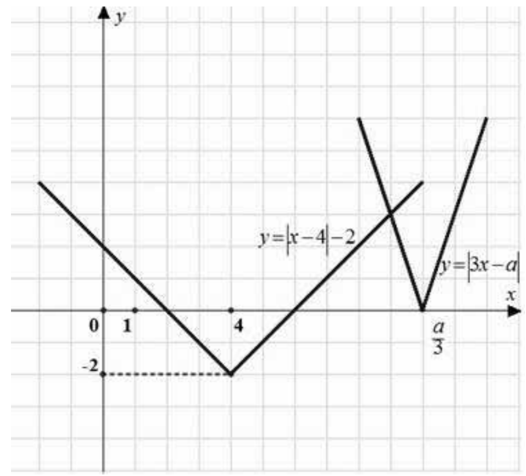
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \le |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x - a| \le |x - 4| - 2$.

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\dfrac{a}{3} \le 2$ или $\dfrac{a}{3} \ge 6$.

1) $\begin{cases} a \le 6 \\ |3x-a| \le -x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ 3x-a \le -x+2, \\ 3x-a \ge x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ x \le \dfrac{a+2}{4}, \\ x \ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a+2}{4} - \dfrac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

2) $\begin{cases} a \ge 18, \\ |3x-a| \le x-6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ 3x-a \le x-6, \\ 3x-a \ge -x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ x \le \dfrac{a-6}{2}, \\ x \ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-6}{2} - \dfrac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \dfrac{3}{2} = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:
$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7;\ 7)$, $(-6;\ 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4