C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{16^{\sin x} - 6\cdot 4^{\sin x} + 8}{\log_2(1-2y)} = 0, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $16^{\sin x} - 6\cdot 4^{\sin x} + 8 = 0$ получаем: $4^{\sin x} = 2$ ли $4^{\sin x} = 4$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 - 2y < 0$,

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ и, следовательно, $\log_2(1-2y) = 0$. В этом случае решений нет.

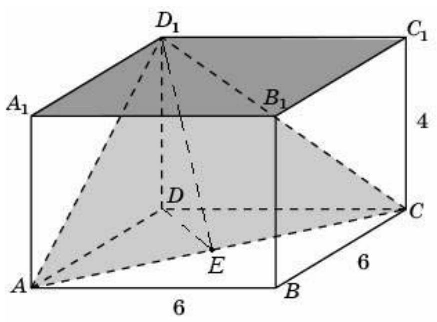
Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E — середина AC. $D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:



$$\mathrm{tg}\angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right)\cdot(\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2 \geq 4\cdot(\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1, \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) = 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) \neq 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(5-x)}\left(x^2 - 6x + 9\right)\right)^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$0 < x \leq 1,\ \ x \geq 3$.

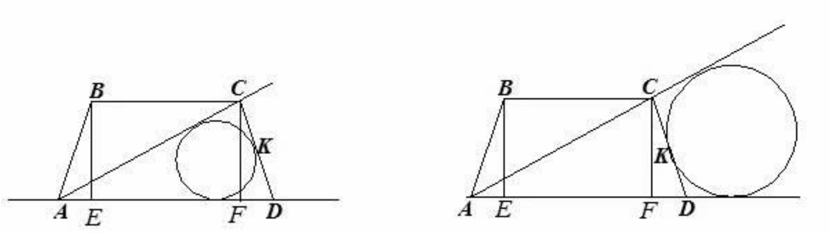
С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1,\ x = 2,\ 3 < x < 4,\ 4 < x \leq 5$.

Ответ: $0 < x \leq 1,\ x = 2,\ 3 < x < 4,\ 4 < x < 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Дана трапеция *ABCD*, основания которой $BC=44$, $AD=100$, $AB=CD=35$. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение.



Найдем диагональ AC. Опустим из вершин *B* и *C* на сторону *AD* перпендикуляры *BE* и *CF* соответственно. *AE* = *FD*, так как трапеция равнобедренная. *BCFE* – прямоугольник.

$AE=\dfrac{100-44}{2}=28$, $BE=\sqrt{35^2-28^2}=21$,

$AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{72^2+21^2}=75$.

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник *ACD*.

$CK=\dfrac{AC+CD-AD}{2}=\dfrac{75+35-100}{2}=5$.

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон *AC* и *AD* за точками *C* и *D* соответственно и отрезка *CD*.

$CK=\dfrac{AD+CD-AC}{2}=\dfrac{100+35-75}{2}=30$.

Ответ: 5 или 30.

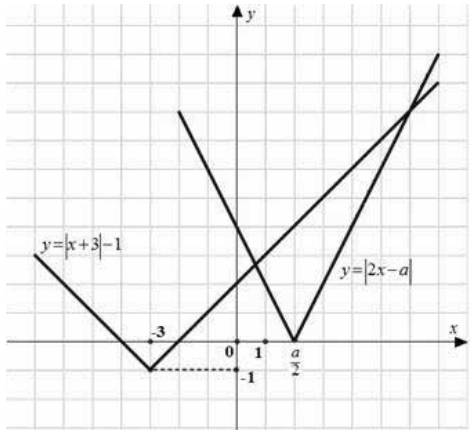
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1\le|x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x-a|\le|x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\dfrac{a}{2}\le-4$ или $\dfrac{a}{2}\ge-2$.

1) $\begin{cases}a\le-8,\\ |2x-a|\le-x-4;\end{cases}$ $\begin{cases}a\le-8,\\ 2x-a\le-x-4,\\ 2x-a\ge x+4;\end{cases}$ $\begin{cases}a\le-8,\\ x\le\dfrac{a-4}{3},\\ x\ge a+4.\end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3}-(a+4)=1$, откуда $a=-\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a\ge -4, \\ |2x-a|\le x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\ge -4, \\ 2x-a\le x+2, \\ 2x-a\ge -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\ge -4, \\ x\le a+2, \\ x\ge \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\frac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-7)^2<\frac{3}{2}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x+2y<\frac{15}{2}, \\ x, y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

С1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos x} - 12\cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0, \\ y = \sin x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $81^{\cos x} - 12\cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ получаем: $9^{\cos x} = 9$ или $9^{\cos x} = 3$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

1) Пусть $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{1}{2}$.

либо $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 + 2y < 0$.

2) Пусть $\cos x = 1$, тогда $y = \sin x = 0$ и, следовательно, $\log_7(1+2y) = 0$. В этом случае решений нет.

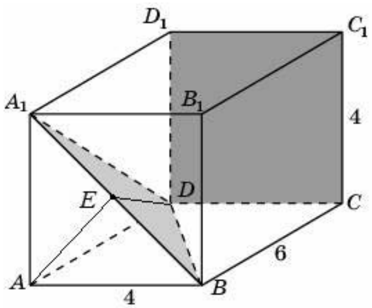
Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\mathrm{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right)\right)^2 \ge 5\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \ne 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \ne 1, \\ x^2 - 8x + 16 > 0 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < 6, \\ x \ne 0, \\ x \ne 5, \\ x \ne 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16) \ne 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 \ne 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right)\right)^2$, получим: $x + \frac{4}{x} \ge 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \ge 0$. Решим это неравенство: $0 < x \le 1$, $x \ge 4$.

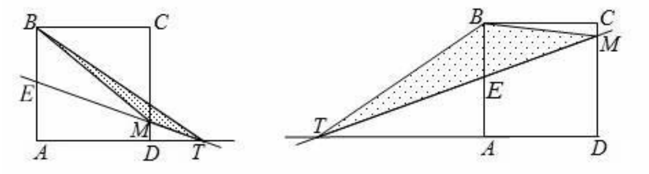
С учетом ограничений получаем $0 < x \le 1$, $x = 3$, $4 < x < 5$, $5 < x \le 6$.

Ответ: $0 < x \le 1$, $x = 3$, $4 < x < 5$, $5 < x < 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\mathrm{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT - \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \mathrm{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 - 4) = 2.$

2) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT + \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \mathrm{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

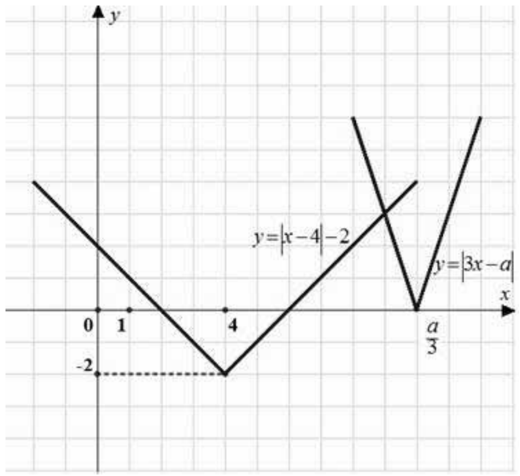
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \le |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x - a| \le |x - 4| - 2$.

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3} \le 2$ или $\frac{a}{3} \ge 6$.

1) $\begin{cases} a \le 6 \\ |3x-a| \le -x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ 3x-a \le -x+2, \\ 3x-a \ge x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ x \le \dfrac{a+2}{4}, \\ x \ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a+2}{4}-\dfrac{a-2}{2}=1$, откуда $a=2$.

2) $\begin{cases} a \ge 18, \\ |3x-a| \le x-6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ 3x-a \le x-6, \\ 3x-a \ge -x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ x \le \dfrac{a-6}{2}, \\ x \ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-6}{2}-\dfrac{a+6}{4}=1$, откуда $a=22$.

Ответ: $a=2,\ a=22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21; \end{cases} \begin{cases} 6 \le x \le 12, \\ 12 \le x \le 20; \end{cases} \quad x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \le y+10 \le 2, \\ -2 \le y+6 \le 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \le y \le -8, \\ -8 \le y \le -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

С1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8}{\log_2(1-2y)}=0,\\ y=\cos x.\end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8=0$ получаем: $4^{\sin x}=2$ или $4^{\sin x}=4$, откуда $\sin x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=1$.

1) Пусть $\sin x=\frac{1}{2}$, тогда либо $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1-2y<0$,

либо $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и $y=\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{2}$.

2) Пусть $\sin x=1$, тогда $y=\cos x=0$ и, следовательно, $\log_2(1-2y)=0$. В этом случае решений нет.

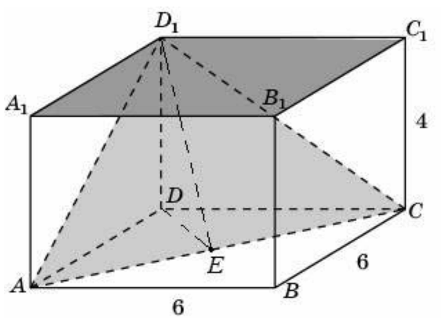
Ответ: $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=6$, $BC=6$, $CC_1=4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E — середина AC. $D_1E\perp AC$, $DE\perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:



$$\operatorname{tg}\angle DED_1=\frac{DD_1}{DE}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2\geq 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases}x\neq 0,\\ 5-x>0,\\ 5-x\neq 1,\\ x^2-6x+9>0\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x<5,\\ x\neq 0,\\ x\neq 4,\\ x\neq 3.\end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)=0$, откуда $x^2-6x+9=1$, т.е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$.

Значит, $x=2$ — решение задачи.

2) $\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\neq 0$, откуда $x^2-6x+9\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2$, получим: $x+\frac{3}{x}\geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0$. Решим это неравенство:

$0<x\leq 1,\ \ x\geq 3$.

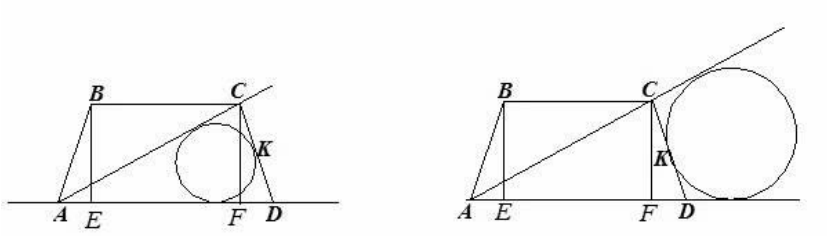
С учетом ограничений получаем: $0<x\leq 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x\leq 5$.

Ответ: $0<x\leq 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x<5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Дана трапеция *ABCD*, основания которой $BC=44$, $AD=100$, $AB=CD=35$. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение.



Найдем диагональ AC. Опустим из вершин *B* и *C* на сторону *AD* перпендикуляры *BE* и *CF* соответственно. *AE* = *FD*, так как трапеция равнобедренная. *BCFE* – прямоугольник.

$$AE=\frac{100-44}{2}=28,\quad BE=\sqrt{35^2-28^2}=21,$$

$$AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{72^2+21^2}=75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник *ACD*.

$$CK=\frac{AC+CD-AD}{2}=\frac{75+35-100}{2}=5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон *AC* и *AD* за точками *C* и *D* соответственно и отрезка *CD*.

$$CK=\frac{AD+CD-AC}{2}=\frac{100+35-75}{2}=30.$$

Ответ: 5 или 30.

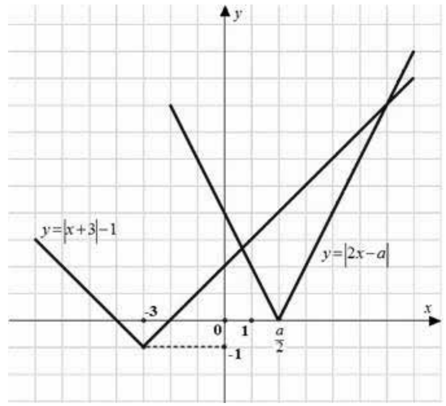
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1\le|x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x-a|\le|x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2}\le-4$ или $\frac{a}{2}\ge-2$.

1) $\begin{cases} a\le-8, \\ |2x-a|\le-x-4; \end{cases}$ $\begin{cases} a\le-8, \\ 2x-a\le-x-4, \\ 2x-a\ge x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a\le-8, \\ x\le\frac{a-4}{3}, \\ x\ge a+4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3}-(a+4)=1$, откуда $a=-\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a\ge -4, \\ |2x-a|\le x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\ge -4, \\ 2x-a\le x+2, \\ 2x-a\ge -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\ge -4, \\ x\le a+2, \\ x\ge \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\frac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-7)^2<\frac{3}{2}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x+2y<\frac{15}{2}, \\ x, y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7;\ 7)$, $(-6;\ 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos x} - 12\cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0, \\ y = \sin x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $81^{\cos x} - 12\cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ получаем: $9^{\cos x} = 9$ или $9^{\cos x} = 3$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

1) Пусть $\cos x = \dfrac{1}{2}$, тогда

либо $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > -\dfrac{1}{2}$.

либо $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < -\dfrac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 + 2y < 0$.

2) Пусть $\cos x = 1$, тогда $y = \sin x = 0$ и, следовательно, $\log_7(1+2y) = 0$. В этом случае решений нет.

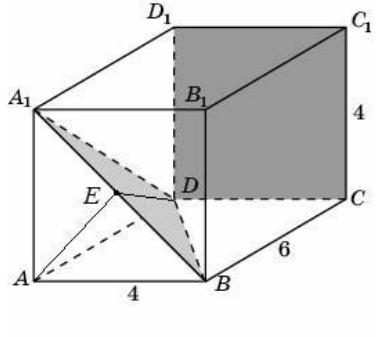
Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\operatorname{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right)\right)^2 \ge 5\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \ne 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \ne 1, \\ x^2 - 8x + 16 > 0 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < 6, \\ x \ne 0, \\ x \ne 5, \\ x \ne 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(6-x)}\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\neq 0$, откуда $x^2-8x+16\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2$, получим: $x+\dfrac{4}{x}\geq 5$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}\geq 0$. Решим это неравенство: $0<x\leq 1,\ \ x\geq 4$.

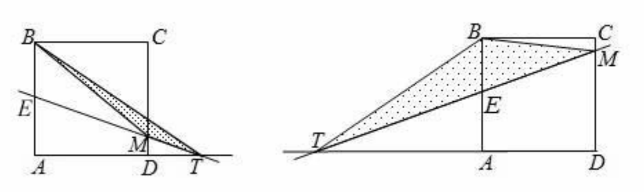
С учетом ограничений получаем: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4<x<5,\ 5<x\leq 6$.

Ответ: $0<x\leq 1,\ x=3,\ 4<x<5,\ 5<x<6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha=3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT}=S_{\Delta BTE}-S_{\Delta BME}=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AT-\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot\operatorname{tg}\alpha-AD)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3-4)=2.$

2) $S_{\Delta BMT}=S_{\Delta BTE}+S_{\Delta BME}=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AT+\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot\operatorname{tg}\alpha+AD)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3+4)=10.$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

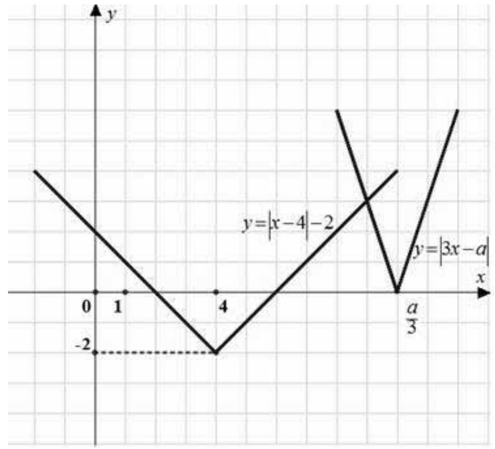
С5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\leq|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку:

$|3x-a|\leq|x-4|-2$.

Построим схематично графики функций $y=|3x-a|$ и $y=|x-4|-2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\dfrac{a}{3}\leq 2$ или $\dfrac{a}{3}\geq 6$.

1) $\begin{cases} a \le 6 \\ |3x-a| \le -x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ 3x-a \le -x+2, \\ 3x-a \ge x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ x \le \dfrac{a+2}{4}, \\ x \ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a+2}{4} - \dfrac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

2) $\begin{cases} a \ge 18, \\ |3x-a| \le x-6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ 3x-a \le x-6, \\ 3x-a \ge -x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ x \le \dfrac{a-6}{2}, \\ x \ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-6}{2} - \dfrac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases}$ $\begin{cases} 6 \le x \le 12, \\ 12 \le x \le 20; \end{cases}$ $x = 12$.

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le y+10 \le 2, \\ -2 \le y+6 \le 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $\begin{cases} -12 \le y \le -8, \\ -8 \le y \le -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $y = -8$.

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4