Дальневосточный государственный университет
Институт математики и компьютерных наук

Г. К. Пак

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2000

ББК 22.10

П 13 Пак Г.К.

Задачи с параметрами. Серия: математика для абитуриента. Сам себе репетитор. Учебное пособие. Владивосток. Изд-во Дальневосточного университета, 2000, 16 с.

Изучение физических, химических, экономических и многих других закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами, к исследованию процесса в зависимости от параметра. Поэтому навыки решения задач с параметрами, знание некоторых их особенностей нужны всем специалистам, в любой области научной и практической деятельности.

Для старшеклассников, абитуриентов, участников физико-математических олимпиад, учителей, преподавателей и слушателей подготовительных курсов.

Издательство
Дальневосточного
университета
2000

Предисловие

Задачи с параметрами — по сути тест на проверку уровня математической культуры, на ее присутствие или отсутствие. Причем возникают они не только в алгебре или геометрии. Изучение физических, химических, экономических и многих других закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами, к исследованию процессов в зависимости от параметра. Практически каждая задача из учебника физики или экономики — это текстовая алгебраическая задача с параметрами.

Решение задач с параметрами требует особой тщательности и глубины анализа. При этом следует правильно разрешить три главные проблемы:

- особое правило записи ответа задач с параметрами,
- учет области допустимых значений,
- учет области применимости формул.

Особое правило записи ответа вытекает из самой постановки задачи с параметрами. Решить уравнение с параметром — это значит для каждого значения параметра выяснить имеет ли уравнение корни или нет; если уравнение имеет корни, то найти их. Аналогично трактуется вопрос о решении уравнений или неравенств, или систем с одним или несколькими параметрами.

Необходимо четко сформулировать в решении задачи с параметрами условия, указывающие область допустимых значений уравнения или неравенства, область допустимых значений параметров. Учет области применимости формулы часто является ядром задания задачи с параметром. При этом надо учитывать свойства участвующих функций. От них зависят условия, обеспечивающие равносильность преобразований. Такие условия особенно важны при решении неравенств. Для того чтобы были соблюдены все эти требования, во многих пособиях рекомендуется записывать все их в виде системы и затем осуществлять равносильные переходы от системы к системе.

В брошюрах серии «Математика для абитуриента. Сам себе репетитор» рассматриваются в основном методы решения задач, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы или на олимпиадах. Уже вышли в свет брошюры «Метод интервалов», «Метод оценок», «Медиана», «Биссектриса», «Высота треугольника», «Сегмент, вмещающий данный угол», «Метод площадей», «Задачи на построение», «Графики», «Целые числа».

1 Особое правило записи ответа

Для каждого значения параметра или набора значений параметров указать имеет ли задача решение и если имеет, то привести все решения.

Если хотя бы для одного значения параметра или хотя бы для одного набора значений параметров из записи ответа не видно имеет ли задача решение или нет или неясно, как выглядит решение, то проведенное исследование нельзя считать полным.

Пример: Решите уравнение $ax = b$.

Ответ: нет корней, если $a = 0$, $b \neq 0$;
любое число, если $a = 0$, $b = 0$;
b/a, если $a \neq 0$.

Пример: Решите уравнение $(a^2 - 9)x = (a - 1)(a + 3)$.

Ответ: $(a - 1)/(a - 3)$, если $a \neq -3$, $a \neq 3$,
любое число, если $a = -3$, нет корней, если $a = 3$.

Пример: Решите уравнение $ax + by = k$.

Ответ: (α, β), если $a = b = k = 0$;
нет решений, если $a = 0$, $b = 0$, $k \neq 0$;
$(\alpha, (k - a\alpha)/b)$, если $b \neq 0$;
$((k - b\beta)/a, \beta)$, если $a \neq 0$, где α и β — любые числа.

Пример: Решите систему: $\begin{cases} ax + by = k, \\ cx + dy = 1. \end{cases}$

Ответ: (α, β), если $a = b = c = d = k = l = 0$;
нет решений, если $ad = cb$, $kd \neq lb$ или $al \neq ck$; или если $a = b = c = d = 0$, $k \neq 0$ или $l \neq 0$;
$(kd - lb, al - ck)$, если $ad \neq cb$,
$((k - b\beta)/a, \beta)$, если $ad = cb$, $kd = lb$, $al = ck$, $a \neq 0$,
$(\alpha, (k - a\alpha)/b)$, если $ad = cb$, $kd = lb$, $al = ck$, $b \neq 0$,
$((l - d\beta)/c, \beta)$, если $ad = cb$, $kd = lb$, $al = ck$, $c \neq 0$,
$(\alpha, (l - c\alpha)/d)$, если $ad = cb$, $kd = lb$, $al = ck$, $d \neq 0$,

где α и β — любые числа.

Пример: Решите неравенство $ax < b$.

Ответ: нет решений, если $a = 0$, $b \leqslant 0$,
любое число, если $a = 0$, $b > 0$,
$(-\infty, b/a)$, если $a > 0$,
$(b/a, +\infty)$, если $a < 0$.

Пример: Решите неравенство $\log_a x > \log_a 5$.

Ответ: нет решений при $a < 0$ или $a = 1$;
$(0; 5)$ при $0 < a < 1$;
$(5; +\infty)$ при $a > 1$.

Пример: Решите неравенство $a^x < a^3$ при $a > 0$.

Ответ: $\varnothing$ при $a = 1$;
$(3, +\infty)$ при $0 < a < 1$;
$(-\infty, 3)$ при $a > 1$.

2 Учет области допустимых значений

При решении обычных уравнений ОДЗ можно не находить. Но в уравнениях с параметрами это, как правило, необходимо, а чаще всего учет ОДЗ составляет задание.

Пример. Решите уравнение $\dfrac{a}{\sqrt{x}+7} = \sqrt{x} - 7$.
∇. Для $x \geqslant 0$ уравнение равносильно такому: $a = x - 49$, т. е. $x = a + 49$; $a + 49 \geqslant 0$.
Ответ: нет решений при $a \in (-\infty, -49)$, $a + 49$ при $a \in [-49, +\infty)$.

Замечание. Типичная ошибка в таких примерах — не учитывается ОДЗ уравнения. В данном случае, как правило, ответ записывается просто: $x = a + 49$. Но для $a < -49$ это значение переменной x не удовлетворяет уравнению.

Пример. Решите неравенство $a\sqrt{x+1} < 1$.
∇. ОДЗ: $x \geqslant 1$. Если $a \leqslant 0$, то неравенству удовлетворяют все значения переменной x из ОДЗ. Если $a > 0$, то $\sqrt{x+1} < \dfrac{1}{a}$, т. е. с учетом ОДЗ $-1 \leqslant x \leqslant -1 + \dfrac{1}{a^2}$.
Ответ: $[-1, +\infty)$ при $a \leqslant 0$; $\left[-1, -1 + \dfrac{1}{a^2}\right)$ при $a > 0$.

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x-a}$.
∇. $x \geqslant -2$, $x \geqslant a$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим $a \geqslant -2$. Следовательно, $x \geqslant a$.
Ответ: нет решений при $a \in (-\infty, -2)$; $[a, +\infty)$ при $a \in [-2, +\infty)$.

Пример. Упростите выражение

$$\frac{2\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)\sin(\frac{\pi}{3}-a) + \sin(\frac{\pi}{6}+a)\cos(\frac{\pi}{3}+a)}$$

Решение

$$\begin{aligned}
&\frac{2\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)\sin(\frac{\pi}{3}-a) + \sin(\frac{\pi}{6}+a)\cos(\frac{\pi}{3}+a)} = \\
=&\frac{1-\sin^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+a) + \sin(\frac{\pi}{6}+a)\cos(\frac{\pi}{3}+a)} = \\
=&\frac{1-\sin^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)\cos(\frac{\pi}{6}+a) + \sin(\frac{\pi}{6}+a)\cos(\frac{\pi}{3}+a)} = \\
=&\frac{\cos^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a+\frac{\pi}{6}+a)} = \frac{\cos^2 2a}{\sin(\frac{\pi}{2}+2a)} = \frac{\cos^2 2a}{\cos 2a} = \cos 2a.
\end{aligned}$$

Знаменатель исходного выражения равен $\cos 2a$. Поэтому должно выполняться условие $\cos 2a \neq 0$, т. е. $2a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $a \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $\cos 2a$, если $a \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Если $a = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то исходное выражение не определено.

3 Учет области применимости формулы

Пример. При каких значениях параметра a имеет ровно один корень уравнение $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a + 1 = 0$?
∇. При $a = 0$ получаем линейное уравнение $-4x + 1 = 0$ с единственным корнем $x = 1/4$. При $a \neq 0$ получаем квадратное уравнение, которое имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю, т. е.

$$4(a+1)^2 - 2a(4a+1) = 0, \quad 2a^2 - 3a - 2 = 0, \quad a_1 = -1/2,\ a_2 = 2.$$

Ответ: 0, $-1/2$, 2.

Замечание. Типичная ошибка при решении таких задач — потеря корня, в данном случае корня 0. Ошибка заключается в том, что решение сводится только к выяснению условий равенства дискриминанта D нулю. Но ведь формулы $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ нахождения корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ применимы лишь в случае, когда $a \neq 0$, т. е. когда уравнение квадратное. Поэтому для применения формул корней квадратного уравнения следует предварительно выяснить при каких значениях параметра коэффициент при квадрате переменной отличен от нуля.

Пример. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $4x^2 - 28x + a = 0$ равна $22,5$?
∇. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 x_2 = a/4$. Следовательно, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - \frac{a}{2} = 22,5$ и $a = 53$. Но выписывать ответ рано. Уравнение имеет решение, если $D \geqslant 0$, т. е. $28^2 - 16a \geqslant 0$, $a \leqslant 49$. Число 53 не может быть ответом, так как при этом значении a уравнение не имеет корней.
Ответ: ни при каких значениях параметра a.

Пример. При каких значениях параметра m уравнение

$$4^{2x} - 4^{x+1} - 3m + m^2 = 0$$

имеет единственный корень?

∇. Заметив, что данное уравнение является квадратным относительно 4^x, находим

$$4^x = 2 \pm \sqrt{4 + 3m - m^2},$$

где $4 + 3m - m^2 \geqslant 0$, т. е. $-1 \leqslant m \leqslant 4$.

Если $4 + 3m - m^2 = 0$, то $4^x = 2$ и $x = \frac{1}{2}$ — единственный корень уравнения при $m = -1$ или $m = 4$.

Если $4 + 3m - m^2 > 0$, то уравнение $4^x = 2 + \sqrt{4 + 3m - m^2}$ всегда имеет один корень. Чтобы он был единственным необходимо, чтобы уравнение $4^x = 2 - \sqrt{4 + 3m - m^2}$ не имело корней, а это будет только тогда, когда $\sqrt{4 + 3m - m^2} \geqslant 2$. То есть имеем систему

$$\odot\, 4+3m-m^2 > 0, \sqrt{4 + 3m - m^2} \geqslant 2, \implies m^2-3m-4 < 0 m^2-3m \leqslant 0, \implies 0 \leqslant m \leqslant 3.$$

Ответ: $\{-1; 4\} \cup [0; 3]$.

Упражнения

1. При каком значении параметра a имеет единственный корень уравнение $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$?
Ответ: $\{1; \frac{1}{5}\}$.

2. При каких значениях m имеет единственный корень уравнение
a) $2000^{2x}-6\cdot 2000^x+m^2-8m=0$.
b) $2000^{2\sin x}-6\cdot 2000^{\sin x}+m^2-8m=0$.

4 Метод введения дополнительного параметра

Пример. Если $m+n=2$, то $m^4+n^4\geqslant 2$. Докажите.
∇. Введем дополнительный параметр a, для которого $m=1-a$, значит, $n=1+a$. Тогда $m^4+n^4=2+12a^2+2a^4\geqslant 2$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.
∇. Введем дополнительный параметр $a=\dfrac{x}{1+x^2}$. Задача свелась к нахождению таких значений параметра, для которых имеет корни уравнение $ax^2-x+a=0$. При $a=0$ уравнение имеет корень $x=0$. Если $a\neq 0$, то уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $1-4a^2\geqslant 0$, откуда $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$.
Ответ: $y_{\min}=-\dfrac{1}{2}$ при $x=-1$; $y_{max}=\dfrac{1}{2}$ при $x=1$.

Пример. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2x-y$, если $3x^2+3xy+x=20$, $x^2-4y^2=0$?
∇. Введем обозначение $a=2x-y$. Тогда $y=2x-a$. Задача свелась к нахождению наименьшего значения параметра a, при котором имеет решение система

$$\begin{cases}3x^2+3x(2x-a)+x=20,\\ x^2-4(2x-a)^2=0,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}9x^2+x(1-3a)=20,\\ x=2(2x-a)\text{ или }x=-2(2x-a).\end{cases}$$

После подстановки значения $x=2a/3$ в первое уравнение получим $3a^2+a-30=0$; $a_1=-10/3$, $a_2=3$. Во втором случае после подстановки в первое уравнение значения $x=2a/5$ получим $3a^2+5a-250=0$; $a_3=-10$, $a_4=25/3$. Если $a=-10$, то $x=-4$, $y=2$.

Ответ: наименьшее значение -10 выражение $2x-y$ принимает при $x=-4$, $y=2$.

Упражнения

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$.

Ответ: $y_{\min} = (-1-\sqrt{208})/23$, $y_{\max} = (-1+\sqrt{208})/23$.

2. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x+2y$, если $x^2+y+2x=9$, $(x+y)^2=9$?

Ответ: -9 при $x=3$, $y=-6$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $2x^2-xy-y^2$, если $x^2+2xy+3y^2=4$.

5 Исследование функций

Пример. При каких значениях параметра a имеют корни уравнения
а) $\sin^6 x + \cos^6 x = a$,
б) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5} = a$?

∇ а) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. После цепочки преобразований получим: $f(x) = 1 - 3(\sin 2x)^2 - 4$. $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, $0 \leqslant \frac{3}{4}\sin^2 2x \leqslant \frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4} \leqslant -\frac{3}{4}\sin^2 2x \leqslant 0$, $\frac{1}{4} \leqslant 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \leqslant 1$.

Ответ: уравнение имеет решение, если $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$.

∇. б) Представим функцию $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-5}$ в виде

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}}.$$

При $x \geqslant 5$ функция непрерывна и убывает от 2 (включая) до нуля (не включая).

Ответ: $a \in (0;2]$.

Пример. Найдите все значения a, при которых имеет решения уравнение $7\sin x + 3\cos x = a$.

∇.
$$7\sin x + 3\cos x = \sqrt{58}\Big(\frac{7}{58}\sin x + \frac{3}{58}\cos x\Big) =$$
$$=\sqrt{58}(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x) = \sqrt{58}\sin(x+\varphi)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$.

Ответ: $a \in [-\sqrt{58}, \sqrt{58}]$.

Пример. При каких значениях параметра a имеют разные знаки корни уравнения $x^2 + x = a(a+1)$?
∇. Нули функции $f(x) = x^2 + x - a(a+1)$ существуют и имеют разные знаки, если дискриминант $1 + 4a(a+1)$ положителен и по теореме Виета $f(0) < 0$, т. е. $a(a+1) > -\frac{1}{4}$ и $a(a+1) > 0$.
Ответ: $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Пример. Решите уравнение

$$(x+m+n)^2 + (m+n-x)^2 + (x-m+n)^2 + (x+m-n)^2 = 4(x^2+m^2+n^2).$$

∇. Положим $f(x) = (x+m+n)^2 + (m+n-x)^2 + (x-m+n)^2 + (x+m-n)^2 - 4(x^2+m^2+n^2)$. Тогда сразу видим, что $f'(x) = 0$, значит, $f(x) = c$, где c — число. А так как $f(0) = 0$, то $c = 0$ и $f(x) \equiv 0$.
Ответ: α, где α — любое число.

Упражнения

1. При каких значениях параметра a имеют корни уравнения $3\sin x - 4\cos x = a$, $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5} = a$?

2. При каких c возрастают и не имеют критических точек функции $f(x) = 8cx - c\sin 6x - 7x - \sin 5x$? $g(x) = 5cx - \sin 8x - c\sin 3x - 3x$?

3. При каких значениях a отрицательна абсцисса точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{a}{3}x^3 + (a+2)x^2 + (a-1)x + 2$?

4. При каких значениях параметра a имеет ровно три корня уравнение $|x+1||x-3| = a$?

6 Системы

Пример. Решите систему $\begin{cases} mx + 2y = m - 1, \\ (10-m)x + (m-1)y = 3(1-m). \end{cases}$

∇. Из первого уравнения $y = \frac{1}{2}(m - 1 - mx)$, подставляя во второе, получим $(10-m)x + \frac{1}{2}(m-1)(m-1-mx) = 3(1-m)$ и после упрощений $(m+5)(m-4)x = (m+5)(m-1)$. При $m = -5$ (подставляем в исходную систему!) система приобретает вид

$$\begin{cases} -5x + 2y = -6, \\ 15x - 6y = 18 \end{cases}$$

и сводится к уравнению $5x - 2y = 6$. Откуда $y = -3 + \dfrac{5}{2}x$. Если $x = 2\alpha$, то $y = -3 + 5\alpha$, где α — любое число. Система имеет бесконечно много решений вида $(2\alpha, -3 + 5\alpha)$.

При $m = 4$ система приобретает вид

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3, \\ 6x + 3y = -9, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + y = 3/2, \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$

И система не имеет решений.

При $m \neq 4$, $m \neq -5$, получим

$$x = \frac{(m-1)}{(m-4)}, \quad y = \frac{1}{2}\left(m - 1 - \frac{m(m-1)}{m-4}\right) = -\frac{2(m-1)}{m-4}.$$

Ответ: нет решений при $m = 4$,
$(2\alpha, -3 + 5\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ при $m = -5$,
$((m-1)/(m-4), -2(m-1)(m-4)$ в остальных случаях.

Пример. Решите систему $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 = ax(x+y), \\ 2x + y = \sqrt{x+y}. \end{cases}$

∇. ОДЗ: $x + y \geqslant 0$. Из свойств арифметического корня $2x + y \geqslant 0$. Будем считать, что $x + y > 0$, так как, если $x + y = 0$, то $x = 0$, $y = 0$. Сделаем замену $t = \sqrt{x+y}$;
$x^2 + t^4 = axt^2$, $x + t^2 = t \implies (x + t^2)^2 = axt^2 + 2xt^2 \implies t^2 = axt^2 + 2xt^2 \implies ax + 2x = 1 \implies x = 1/(a+2) \implies (a+2)^2y^2 - (a^2-4)y - (a-2) = 0$.
Если $a = -2$, то $2x^2 + 2xy + y^2 = -2x^2 - 2y^2 \implies 4x^2 + 4xy^2 + y^2 = 0 \implies 2x + y = 0 \implies x + y = 0 \implies x + y = 0 \implies x = 0$, $y = 0$.
Дискриминант квадратного трехчлена равен

$$(a^2-4)^2 + 4(a-2)(a+2)^2 = (a^2-4)(a+2)$$

и меньше нуля при $a^2 - 4 < 0$, следовательно, при $-2 \leqslant a < 2$ кроме нулевого решения других нет. Далее предполагаем, что $a < -2$ или $a \geqslant 2$. Тогда

$$y = \frac{a - 2 - \sqrt{a^2-4}}{2(a+2)} \quad \text{или} \quad y = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2-4}}{2(a+2)}.$$

Полученные решения входят в ОДЗ системы, так как $x + y = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2(a+2)} \geqslant 0$. Но при $a < -2$ второе решение не входит в ответ, так как в этом случае

$$2x + y = \frac{2}{a+2} + \frac{a - 2 + \sqrt{a^2-4}}{2(a+2)} = \frac{2}{a + 2 - \sqrt{a^2-4}} < 0.$$

В остальных случаях условие $2x+y>0$ выполнено и полученные решения удовлетворяют системе.

Ответ: $(0,0)$ при $-2 \leqslant a < 2$;
$(0,0)$, $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{a-2-\sqrt{a^2-4}}{2(a+2)}\right)$ при $a < -2$;
$(0,0)$, $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{a-2-\sqrt{a^2-4}}{2(a+2)}\right)$, $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{a-2+\sqrt{a^2-4}}{2(a+2)}\right)$ при $a > 2$;
$(0,0)$, $(0,1/4)$ при $a=2$.

Пример. Решите систему $\begin{cases} ax-1 \leqslant 0, \\ x-4a \geqslant 0. \end{cases}$

∇. Если $a=0$, то $x=0$. Если $a<0$, то $x \geqslant \frac{1}{a}$, $x \geqslant 4a$.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \geqslant 4a \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 \geqslant 1, \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a \geqslant -1 \text{ или } -2a \geqslant 1 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a \leqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{a};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} < 4a \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 > 1 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < -2a < 1 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0 \Rightarrow x \geqslant 4a.$$

Пусть $a>0$, тогда $x \leqslant \frac{1}{a}$, $x \geqslant 4a$.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} < 4a \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 > 1 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{решений нет;}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \geqslant 4a \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 \leqslant 1 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 4a \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}.$$

Ответ: $[1/a, +\infty)$ при $a \leqslant -1/2$;
$[4a, +\infty)$ при $-1/2 < a \leqslant 0$;
$[4a, 1/a]$ при $0 < a \leqslant 1/2$;
нет решений при $a > 1/2$.

Упражнения

Решить системы

а) $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ 2x-4y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (m-5)x-2y=m-7, \\ (m+1)x+my=3m. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x+(a-1)y=3b, \\ x-2y=3. \end{cases}$

Ответ: в) нет решений при $a=-9$, $b \neq 5$,
$(2\alpha+3, \alpha)$ при $a=-9$, $b=5$,
$\left(\frac{3(a+2b-1)}{a+9}, \frac{3(b-5)}{a+9}\right)$ при $a \neq 9$.

7 Меняем ролями параметр и неизвестную

Пример. Решите систему $\begin{cases} x^2 - 2ay - a^2 = 0, \\ y^2 - 2bx - b^2 = 0. \end{cases}$

∇. $\begin{cases} a^2 + 2ay - x^2 = 0 \\ b^2 + 2bx - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -y \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \\ b = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$ Следовательно,

$$a - b = x - y \text{ или } a + b = -x - y.$$

В первом случае $y = x - a + b \Rightarrow x^2 - 2a(x - a + b) - a^2 = 0 \Rightarrow (x - a)^2 = 2ab$.
Во втором случае $y = -x - a - b \Rightarrow x^2 + 2a(x + a + b) - a^2 = 0 \Rightarrow (x + a)^2 = -2ab$.

Ответ: (0,0) при $a = 0$, $b = 0$;
$(0, b)$, $(0, -b)$ при $a = 0$, $b \neq 0$;
$(a, 0)$, $(-a, 0)$ при $a \neq 0$, $b = 0$;
$(a + \sqrt{2ab}, b + \sqrt{2ab})$, $(a - \sqrt{2ab}, b - \sqrt{2ab})$ при $ab > 0$;
$(-a + \sqrt{-2ab}, -b - \sqrt{-2ab})$, $(-a - \sqrt{-2ab}, -b - \sqrt{-2ab})$ при $ab < 0$.

Пример. Решите уравнение $\sqrt{a - \sqrt{x + a}} = x$.
∇. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x + a} = a - x^2 \\ x^2 \leqslant a \\ a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + a = (a - x^2)^2 \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a} \end{cases}.$$

Решим квадратное уравнение относительно a:

$$a_{1,2} = (2x^2 + 1) \pm (2x + 1)/2 \Rightarrow a_1 = x^2 + x + 1, \quad a_2 = x(x - 1).$$

Осталось решить две системы

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = a, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x - 1) = a, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a}. \end{cases}$$

Ответ: нет корней при $a < 0$ и $0 < a < 1$;
0 при $a = 0$;
$(\sqrt{4a - 3} - 1)/2$ при $a \geqslant 1$.

8 Текстовые задачи

В текстовых задачах особое правило записи ответа дополняется требованием учесть физический или геометрический смысл величин, о которых идет речь. Нередко очевидные по смыслу ограничения на параметры в ответе не выписывают, но при этом следует соблюдать осторожность: можно упустить какую-либо особенность задачи.

Пример. Двум рабочим для выполнения работы требуется a дней. Работа была выполнена за b дней, причем $1/3$ всей работы выполнил первый рабочий, а завершил работу второй. Сколько времени требуется каждому рабочему в отдельности на выполнение всей работы?

Пусть за x дней выполняет работу первый рабочий, а за y дней второй. Ясно, что $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > a$. Из условий задачи получаем систему

$$\begin{cases} 1/x + 1/y = 1/a, \\ x/3 + 2y/3 = b. \end{cases}$$

Решая, находим

$$\begin{cases} a(x+y) = xy \\ x + 2y = 3b \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3b - 2y \\ 2y^2 - (a+3b)y + 3ab = 0 \end{cases}$$

Для дискриминанта квадратного уравнения с учетом того, что $b > a$ имеем

$$(a+3b)^2 - 24ab = a^2 + 9b^2 - 18ab \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < a \leqslant (9 - 6\sqrt{2})b.$$

В этом случае

$$y_{1,2} = \frac{a + 3b \pm \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}}{4}, \quad x_{1,2} = \frac{3b - a \mp \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}}{2}.$$

Ответ: нет решений при $a \leqslant 0$ или $b < 0$ или $a > (9 - 6\sqrt{2})b$,
$\frac{3b-a-\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{2}$, $\frac{3b+a+\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{4}$ при $b > 0$;
$\frac{3b-a+\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{2}$, $\frac{3b+a-\sqrt{a^2+9b^2-18ab}}{4}$ при $0 < a < (9 - 6\sqrt{2})b$.

Упражнения

1. Две молотилки обмолачивают весь хлеб в a дней. Если бы первая молотилка обмолотила половину всего хлеба, а вторая оставшуюся часть, то они проработали бы b дней. Во сколько дней каждая из них, работая отдельно, могла бы окончить эту работу?
Ответ: нет решений при $a \leqslant 0$ или $b \leqslant 0$ или $0 < b < 2a$; Два симметричных решения $\left(b - \sqrt{b^2 - 2ab}, b + \sqrt{b^2 - 2ab}\right)$, $\left(b + \sqrt{b^2 - 2ab}, b - \sqrt{b^2 - 2ab}\right)$ при $b > 2$, $a > 0$.

9 Задачи с решениями

1. При каком значении a имеет единственное решение уравнение

$$a2^x + 2^{-x} = 5?$$

Решение. При $a = 0$ уравнение имеет единственное решение $x = -\log_2 5$. Пусть $a \neq 0$. Замена $t = 2x$, $t > 0$, приводит уравнение к виду $at^2 - 5t + 1 = 0$. Если $25 - 4a < 0$, то корней нет. Если $25 - 4a \geqslant 0$, то корни этого квадратного уравнения существуют и вычисляются по формулам

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4a}}{2a}.$$

При $25 - 4a = 0$ уравнение имеет единственное решение $t = 2/5$. Уравнение $2^x = 2/5$ также имеет единственное решение $x = 1 - \log_2 5$. При положительном дискриминанте в ответ надо включать те значения параметра, для которых один корень положителен, а другой отрицателен. Рассмотрим системы

$$\begin{cases} \dfrac{5 - \sqrt{25-4a}}{2a} < 0, \\ \dfrac{5 + \sqrt{25-4a}}{2a} > 0, \\ 25 - 4a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5 + \sqrt{25-4a}}{2a} < 0, \\ \dfrac{5 - \sqrt{25-4a}}{2a} > 0, \\ 25 - 4a > 0. \end{cases}$$

При $0 < a < 25/4$ корни положительны и системы не имеют решений. Если $a < 0$, то $\sqrt{25-4a} > 5$ — вторая система имеет решение.

Ответ: $a \in (-\infty, 0) \cup \{25/4\}$.

2. При каких a имеет решение система

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ y = ax + 1. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y \geqslant 0$. При $a = 0$ система имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. В дальнейшем считаем $a \neq 0$. Подставив во второе уравнение $y = 1/x$, получим $1/x = ax + 1$, $ax^2 + x - 1 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a}.$$

Если $a = -1/4$, то система имеет единственное решение $x = 2$, $y = 1/2$. Если $a \neq 0$ и $a \neq -1/4$, то нас интересуют значения a, для которых корни имеют разные знаки. Если $a > 0$, то это возможно.

Ответ: $\{-1/4\} \cup [0, +\infty)$.

3. Решите уравнение $|a-9|3^{x-2} + a9^{x-1} = 1$.
Решение. $a9^x + |a-9|3^x - 9 = 0$; при $a = 0$ есть решение $x = 0$; далее имеем, при $a = -9$ решение $x = 0$ и при $a = 9$ решение $x = 0$.

Пусть $a \neq 0$, тогда $3^x = (-|a-9| \pm (a+9))/2a$. Если $a < 9$, то $3^x = -9/a$ или $3^x = 1$, $x = 0$. Уравнение $3^x = -9/a$ не имеет решения для $0 < a < 9$ и его корень $x = 2 - \log_3(-a)$ при $a < 0$. Если $a > 9$, то $3^x = -1$ (нет корней) или $3^x = 9/a$, т. е. $x = 2 - \log_3 a$.

Ответ: $0; 2 - \log_3(-a)$ при $a < -9$;
0 при $a = -9$;
$0; 2 - \log_3(-a)$ при $-9 < a < 0$;
0 при $0 \leqslant a \leqslant 9$;
$1 - \log_3 a$ при $a > 9$.

4. Решите уравнение $\sqrt{x+a} = x$.
Решение. $x + a = x^2$; $x^2 - x - a = 0$. Если $a < -1/4$, то корней уравнения нет. Если $a = -1/4$, то уравнение имеет единственный корень $x = 1/2$. Если $a > -1/4$, то $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

При $-1/4 < a < 0$ оба корня положительны и проверка показывает, что удовлетворяют уравнению. При $a > 0$ положителен лишь второй корень и проверка показывает, что он удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: нет корней при $a < -1/4$; $\{1/2\}$ при $a = -1/4$;
$\{(1-\sqrt{1+4a})/2; (1+\sqrt{1+4a})/2\}$ при $-1/4 < a \leqslant 0$;
$\{(1+\sqrt{1+4a})/2\}$ при $a > 0$.

5. Решите уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$.
Решение. Если $x = 1$, то a — любое число, т. е. для любого значения параметра a существует корень 1. Если $x = -3$, то $a = -1$, т. е. при $a = -1$ существует корень -3. Более того, при $a = -1$ уравнению удовлетворяют все значения $x \in [-3, 1]$. При $a = 1$ исходному уравнению удовлетворяют все значения $x \geqslant 1$.

Пусть $x < -3$. Тогда уравнение приводится к виду $(a-1)x = a + 7$ и, если $a \neq 1$, то $x = \frac{a+7}{a-1}$. Причем, $\frac{a+7}{a-1} < -3$, значит, $(-1 < a < 1)$.

При $-3 < x < 1$ уравнение приводится к виду $x(a+1) = (a+1)$. Если $a \neq -1$, то $x = 1$; не входит во взятый интервал.

При $x > 1$ уравнение приобретает вид $x + 3 - a(x-1) = 4$, или $(a-1)x = (a-1)$. Если $a \neq 1$, то $x = 1$; не входит во взятый интервал.

Ответ: $\frac{a+7}{a-1}$ при $a \in (-1, 1)$;
1 при $a \in (-\infty, +\infty)$;
$[1, +\infty)$ при $a = 1$;
$[-3, 1]$ при $a = -1$.

Содержание

Учебное издание

Геннадий Константинович Пак

Редактор С. Г. Масленникова
Корректор Н. В. Демко
Научный редактор В. И. Ткаченко

ЛР 020277. Подписано в печать 14.04.2000. Формат 60x84 1/16. Бум. Тип №2
Усл. печ. л. 1,22. Уч.-изд. л. 0,97. Тираж 1000 экз.
Издательство Дальневосточного университета
690600, Приморский край, Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в учебно-полиграфическом комплексе
Института математики и компьютерных наук ДВГУ
690600, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК (ИМКН ДВГУ)

Специальности:

- Математика (математические методы защиты информации, компьютерная математика)
- Прикладная математика и информатика (математическое и компьютерное моделирование, математическое и информационное обеспечение экономической деятельности, системное программирование)
- Математические методы в экономике
- Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (системное программирование, программирование систем искусственного интеллекта, технология программирования, компьютерная графика)
- Прикладная математика и механика (мехатроника, робототехника, механика сплошной среды)

Трудоустройство:

- Институт — лидер бизнес-образования. Выпускники ИМКН занимают ведущие позиции в банковской сфере, экономических структурах, деловых кругах. Программисты, особенно со знанием английского языка, наиболее востребованы в современных условиях. Консультанты по бухгалтерским программам, специалисты по информационной безопасности сегодня нужны повсеместно.

Особые плюсы:

- Фундаментальное и опережающее время образование
- Международное признание диплома (Магистр математики, Магистр компьютерных наук)
- Профессиональное владение компьютерными технологиями
- Быстрая карьера (3-5 лет там, где 10-15 лет карьерного роста остальным)
- Универсальность и конкурентоспособность диплома. Российские математики и программисты за рубежом на расхват (чего не скажешь о юристах, экономистах, медиках).

Особые минусы:

- Минус один — трудно учиться. Но там, где легко учиться, там время и деньги потрачены впустую.

Деньги.

- Программисты, специалисты по информационной безопасности — самая высокооплачиваемая профессия. Самый богатый человек планеты Билл Гейтс — прикладной математик, программист.

Вы молоды и уверены в себе,
Вы сильны и целеустремленны!
Институт математики и компьютерных наук —
Ваш единственный и правильный выбор!